**МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ЧЕЧЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. А. И. ГЕРЦЕНА» (Дагестанский филиал)**

**З.А. Магомеддибирова**

# ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

*Учебное пособие для бакалавров по профилю подготовки «Начальное образование» направления «Педагогическое образование»*

**Махачкала, 2024**

**УДК 510**
**ББК 22.12**
**М12**

*Работа рекомендована ученым советом Дагестанского филиала РГПУ им. А.И. Герцена*

***Рецензенты:***

**Гашаров Н.Г.** – кандидат физ.- мат. наук, доцент, Дагестанский государственный педагогический университет им. Р. Гамзатова.

**Рахметов Т.С.** – кандидат педагогических наук, доцент, руководитель отдела практик ПОАНО «Национальный инновационный колледж», Махачкала.

**Магомеддибирова З.А. Основные математические понятия.** Учебное пособие для бакалавров по профилю подготовки «Начальное образование» направления «Педагогическое образование». – Махачкала: ЧГПУ, 2024. – 99 с.

Учебное пособие подготовлено в полном соответствии с программой курса для отделения начального образования. В содержании пособия раскрыты ключевые теоретические положения по основным разделам и темам курса «Основные математические понятия», изложены решения типовых задач, предложены задания для самостоятельного решения; в приложении даны материалы для самостоятельной работы и учета знаний студентов.

Пособие предназначено для студентов бакалавриата по профилю подготовки «Начальное образование» направления «Педагогическое образование».

**ISBN 978-5-907968-28-8**

## Предисловие

На современном этапе актуален заказ общества на всесторонне развитую личность, способную принимать нестандартные решения, умеющую анализировать, сопоставлять имеющуюся информацию, делать выводы и использовать творчески полученные знания.

В связи с этим современная система российского образования переживает большие изменения в своем содержании и структуре. Во главу угла современной образовательной системы ставится задача развития личности при одновременном решении как образовательных, так и воспитательных задач. На передний план в данный момент выходят требования к выпускникам вузов: *владение не только теоретическими знаниями, но и творческими подходами в решении поставленных задач; умением нестандартно мыслить.*

Математика имеет большие возможности в развитии не только абстрактного, творческого и дивергентного мышления, но и нестандартного. Огромные возможности данной дисциплины исправно можно использовать как средство развития функциональной, математической и финансовой грамотности.

Данное пособие написано в соответствии с программой по дисциплине «Основные математические понятия» для бакалавров по профилю подготовки «Начальное образование» направления «Педагогическое образование».

*Цель пособия* – помочь студентам в самостоятельной подготовке по теоретическим вопросам данного курса, в приобретении необходимых знаний, умений и способов решения практических заданий соответствующего содержания, *в овладении компетенциями,* необходимыми в будущей профессиональной деятельности будущего учителя начальной школы.

В пособии рассматриваются ключевые теоретические положения по основным разделам и темам курса «Основные математические понятия», изложены решения типовых задач различных видов и степени сложности, предложены задания для самостоятельного решения. Студент, пользующийся этим пособием, должен помнить, что перед каждым практическим занятием следует изучить не только ключевые теоретические положения, представленные в начале каждого пункта, но и соответствующие разделы по указанной литературе.

## Тема 1. Основные математические понятия.

1. Общая характеристика «понятия», объём и содержание понятия, классификация.

2. Определение понятий. Способы раскрытия содержания понятий в начальном курсе математики.

3. Основные математические понятия.

### 1.1 Общая характеристика «понятия», объём и содержание понятия, классификация.

Понятия, которые изучаются в начальном курсе математики, обычно представляют в виде четырех групп:

- понятия, связанные с числами и операциями над ними: число, цифра, сложение, слагаемое и др.;
- алгебраические понятия: выражение, равенство, уравнение и др.;
- геометрические понятия: прямая, отрезок, треугольник и т. д.;
- понятия, связанные с величинами и их измерением.

В логике понятие рассматривают как форму мышления, отражающую объекты (предметы или явления) в их существенных и общих свойствах. Языковой формой понятия является слово или группа слов.

Понятия не существуют в объективном мире. Они возникают в сознании человека и заменяют предметы и явления этого мира, являясь их идеальными образами.

Иметь **понятие** об объекте — значит, уметь выделить его существенные признаки и отличить от всех других объектов. Математические понятия, как и любые другие, существуют лишь в мышлении человека и тех знаках и символах, которые образуют математический язык.

Чтобы овладеть общими подходами к изучению понятий в начальном курсе математики, учителю необходимы знания об объеме и содержании понятия, об отношениях между понятиями и определении понятия.

Всякий математический объект обладает определенными свойствами. Например, квадрат имеет четыре стороны, четыре прямых угла, равные диагонали. Можно указать и другие его свойства.

Различают **существенные и несущественные** свойства объекта.

Свойство считают *существенным* для объекта, если оно присуще этому объекту и без него он не может существовать (например, для квадрата существенными являются все вышеперечисленные свойства).

*Несущественно* для квадрата *ABCD* свойство: «сторона *AD* горизонтальна». Если квадрат повернуть, то сторона *AD* окажется расположенной по-другому (Рис. 1). Поэтому, чтобы понимать, что

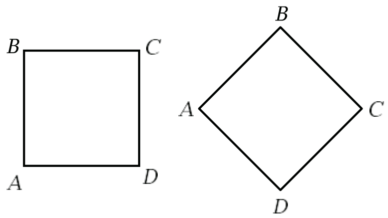



Рис.1

представляет собой данный математический объект, надо знать его *существенные* свойства.

Когда говорят о математическом *понятии*, то обычно имеют в виду множество объектов, обозначаемых одним термином (словом или группой слов). Так, говоря о квадрате, имеют в виду все геометрические фигуры, являющиеся квадратами. Считают, что множество всех квадратов составляет *объем* понятия «квадрат».

***Объем понятия*** — это множество всех объектов, которые обобщаются в понятии и обозначаются одним термином.

Любое понятие имеет не только объем, но и *содержание.*

***Содержание понятия*** — это множество всех существенных свойств объекта, отраженных в этом понятии.

Рассмотрим, например, понятие «*прямоугольник*».

*Объем* данного понятия — это множество различных прямоугольников, а в его *содержание* входят такие свойства прямоугольника, как «иметь четыре прямых угла», «иметь равные противоположные стороны», «иметь равные диагонали» и т. д.

Между объемом понятия и его содержанием существует взаимосвязь: *если увеличивается объем понятия, то уменьшается его содержание, и наоборот*. Например, объем понятия «квадрат» является частью объема понятия «прямоугольник», а содержание понятия «квадрат» включает в себя больше свойств, чем содержание понятия «прямоугольник» («все стороны равны», «диагонали взаимно перпендикулярны» и др.).

Любое понятие нельзя усвоить, не осознав его взаимосвязи с другими понятиями. Поэтому важно знать, в каких отношениях могут находиться понятия, и уметь устанавливать эти связи.

Отношения между понятиями тесно связаны с отношениями между их объемами, т. е. множествами.

Понятия обычно обозначают строчными буквами латинского алфавита:

$a, b, c, \ldots, z$.

Пусть заданы два понятия $a$ и $b$. Объемы их обозначим соответственно $A$ и $B$.

Если $A \subset B$, $(A \neq B)$, то говорят, что понятие $a$ — ***видовое*** *по отношению к понятию* $b$, а понятие $b$ — ***родовое*** *по отношению к понятию* $a$.

Например, если $a$-«прямоугольник», $b$— «четырех угольник», то их объемы $A$ и $B$ находятся в отношении включения ($A \subset B$ и $A \neq B$), поскольку всякий прямоугольник является четырех угольником. Поэтому можно утверждать, что понятие «*прямоугольник*» — видовое по отношению к понятию «четырехугольник», а понятие «*четырехугольник*» — родовое по отношению к понятию «прямоугольник».

Если $A = B$, то говорят, что *понятия* $a$ и $b$ ***тождественны***. Например, тождественны понятия «равносторонний треугольник» и «равноугольный треугольник», так как их объемы совпадают.

*Если множества $A$ и $B$ не связаны отношением включения, то говорят, что понятия $a$ и $b$ не находятся в отношении рода и вида и не тождественны.* Например, не связаны такими отношениями понятия «треугольник» и «прямоугольник».

Рассмотрим подробнее отношение рода и вида между понятиями. Во-первых, *понятия рода и вида относительны*: одно и то же понятие может быть родовым по отношению к одному понятию и видовым по отношению к другому. Например, понятие «прямоугольник» — родовое по отношению к понятию «квадрат» и видовое по отношению к понятию «четырехугольник».

Во-вторых, для данного понятия часто можно указать несколько родовых понятий. Так, для понятия «прямоугольник» родовыми являются понятия «четырехугольник», «параллелограмм», «много- угольник». Среди них можно указать ближайшее. Для понятия «прямоугольник» ближайшим является понятие «параллелограмм».

В-третьих, видовое понятие обладает всеми свойствами родового понятия. Например, квадрат, являясь видовым понятием по отношению к понятию «прямоугольник», обладает всеми свойствами, присущими прямоугольнику. Так как объем понятия —это множество, то удобно, устанавливая отношения между объемами понятий, изображать их с помощью кругов Эйлера. Установим, например, отношения между следующими парами понятий $a$ и $b$, если:

1)$a$ — «прямоугольник», $b$ — «ромб»;

*2)*$a$ — «многоугольник», $b$ — «параллелограмм»;

*3)*$a$ — «прямая», $b$ — «отрезок»

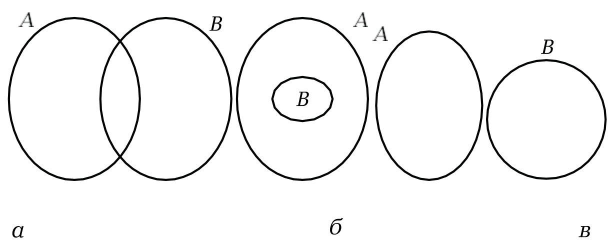



Рис. 2

В случае 1) объемы понятий пересекаются, но ни одно множество не является подмножеством другого (рис.2,*а*). Следовательно, можно утверждать, что данные понятия $a$ и $b$ не находятся в отношении рода и вида.

В случае 2) объемы данных понятий находятся в отношении включения, но не совпадают — всякий параллелограмм является многоугольником, но не наоборот (рис.2,*б*).

Следовательно, можно утверждать, что понятие «параллелограмм» —**видовое** по отношению к понятию «многоугольник», а понятие «многоугольник» — **родовое** по отношению к понятию «параллелограмм».

В случае 3) объемы понятий не пересекаются, так как ни про один отрезок нельзя сказать, что он является прямой, и ни одна прямая не может быть названа отрезком (см. рис.2.*в*). Следовательно, данные понятия не находятся в отношении рода и вида.

О понятиях «прямая» и «отрезок» можно сказать, что они находятся *в отношении целого и части*: отрезок — часть прямой, а не ее вид. И если видовое понятие обладает всеми свойствами родового понятия, то часть не обязательно обладает всеми свойствами целого. Например, отрезок не обладает таким свойством прямой, как бесконечность.

Понятия классифицируют по различным признакам. По объему понятия делятся на *единичные, общие* и *пустые.* Объем *единичного* понятия составляет одноэлементный класс. Например, «0», «1000».

Объем *общего* понятия включает число элементов больше единицы. Среди общих понятий можно выделить те, объем которых включает конечное множество предметов (например, «однозначное натуральное число») и те, объем которых включает бесконечное множество предметов (например, «квадрат»).

Кроме общих и единичных понятий по объему выделяют понятия *пустые* (с нулевым объемом), т.е. такие, объем которых представляет пустое множество (например, «вечный двигатель», «баба Яга», «круглый квадрат», «человек, проживший 300 лет» и др.).

По содержанию различают понятия *сравнимые и несравнимые*.

Сравнимые понятия_имеют некоторые общие признаки (квадрат и прямоугольник).

Несравнимые понятия не имеют общих признаков (четное число и треугольник; число «2» и окружность).

Сравнимые понятия делятся на *совместимые* и *несовместимые*.

Совместимые – это такие понятия, объемы которых имеют хотя бы один общий элемент.

Несовместимые – это такие понятия, объемы которых не имеют ни одного общего элемента (например, четные и нечетные числа).

Объемы совместимых понятий могут находиться в трех видах отношений:

а) отношение *тождества* – объемы совпадают. Например, если объем понятия -«биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника» обозначим через С и объем понятия «высота равнобедренного треугольника» обозначим через Д, то множества С и Д совпадают;

б) отношение *пересечения.* Например. А – «четные числа», В – «числа больше 50».Ясно,что А и В пересекаются, так как существуют четные числа, которые больше 50;

в) отношение *включения*. Например. А -«натуральные числа», В– «натуральные числа, оканчивающиеся нулем». Ясно, что В<А.

**1.2 Определение понятий. Способы раскрытия содержания понятий в начальном курсе математики.**

<u>Термин</u> –это слово или словосочетание, обозначающее строго определенное понятие в какой-либо области знания.

Определение понятия (дефиниция) –это логическая операция, которая раскрывает **содержание понятия** и включает в себя описание совокупности существенных признаков предметов, отображаемых данным понятием.

В определении понятия (ОП) есть две части: термин (Т) – наименование понятия и определяющее его выражение (ОВ), которое описывает суть понятия, его свойства.

Общепризнанные *требования* к определению понятия, следующие:

1) соразмерность (термин и дефиниция должны совпадать по объему и быть взаимозаменяемы, т.е. **объем определяющего понятия должен совпадать с объемом определяемого понятия);**

2) ясность и однозначность (определение не может быть двусмысленным и не должно содержать непонятных или неопределенных терминов);

3) нетавтологичность (запрет порочного круга)

Например ,определение: **а>в**, если **а-в>0** неверно, т.к. здесь понятие > определяется через это же само понятие >;

4) не должно содержать в себе отрицания.

**Способы раскрытия содержания понятий в начальном курсе математики:**

1) Определение понятия можно представить через «**род» и «видовое отличие**». Например, «квадрат (определяемое понятие) – это прямоугольник (родовое понятие), у которого все стороны равны (видовое отличие)»

Этот способ определения широко используется в математике. Определения, полученные этим способом, называются ***вербальными***. В них одно понятие определяется через другое, введенное ранее. В качестве родового понятия берется ближайший род.

2)Содержание понятия раскрывается путем указания **ближайшего рода и способа получения предметов, входящих в объем определяемого понятия (вместо видового отличия).** Такие определения называются ***конструктивными*** (генетическими). Например, «четное число – это число, которое делится на два». «Число» - ближайшее родовое понятие, «делится на два» - способ проверки соответствующего свойства. Или: «треугольник – фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой и трех отрезков, последовательно соединяющих эти точки» (здесь указан способ построения).

3) В начальных классах для раскрытия содержания вводимых понятий широко используется прием **показа конкретных предметов, входящих в объемы этих понятий.** Такие определения называются **остенсивными.** Например, запись «17 + 3» называется «математическим выражением».

4) Иногда содержание понятия раскрывается путем **перечисления множества объектов, входящих в объем понятия.** Например, «единицы, десятки, сотни составляют класс единиц».

### 1.3 Основные математические понятия.

Как и любая наука, математика имеет свои **основные понятия**, которыми оперирует. К ним относятся: **множество, число, счет, величина, форма** и др.

Исходным содержанием большинства математических понятий служат реальные предметы и явления окружающей жизни и деятельности людей.

Дадим определения **основным математическим понятиям.**

Понятие ***множество*** является одним из основных понятий математики и поэтому не определяется через другие. Его можно пояснить на примерах. Так, можно говорить о множестве гласных букв русского алфавита, множестве звезд на небе, растений, животных вокруг него, множестве разных звуков, множестве натуральных чисел, множестве треугольников. Дадим определения основным математическим понятиям.

**Множество** — это совокупность объектов, которые рассматриваются как единое целое.

Математический смысл слова «множество» отличается от того, как оно используется в обыденной речи, где его связывают с большим числом предметов. В математике этого не требуется. Здесь можно рассматривать множество, состоящее из одного объекта, и множество, не содержащее ни одного объекта.

Множества принято обозначать прописными буквами латинского алфавита: ***A, B, C, …, Z.***

Множество, не содержащее ни одного объекта, называют ***пустым*** и обозначают символом $\emptyset$.

Объекты, из которых образовано множество, называют ***элементами*** множества. Элементы множества принято обозначать строчными буквами латинского алфавита: ***a, b, c, …, z.***

В математике нередко приходится выяснять, принадлежит какой-либо объект рассматриваемому множеству или не принадлежит. Например, мы говорим, что 5 — число натуральное, а 0,75 не является натуральным числом. Другими словами, мы утверждаем, что число 5 принадлежит множеству натуральных чисел, а число 0,75 ему не принадлежит.

Множество характеризуется различными свойствами, т.е. множество может быть задано некоторыми характеристиками. Под этими характеристиками подразумеваются такие свойства, которыми владеют все объекты, принадлежащие данному множеству, и не владеет ни один предмет, который не принадлежит ему, т.е. этот предмет не является его элементом.

Есть два способа определения мощности множества: первый - *пересчитывание* всех его элементов и называние результата числом; другой- *выделение характерологических* особенностей множества

Множество может быть охарактеризовано **натуральным числом**. В таком случае считают, что это число обозначает *мощность множества.*

Элементами множества могут быть не только отдельные объекты, но и их совокупности. Например, при счете элементов какого-либо множества парами, тройками, десятками. В этих случаях элементами множества выступает не один предмет, а два, три, десять -совокупность. Множества бывают ***конечные*** и ***бесконечные***. Эти понятия мы принимаем без определения. Поясним их на примерах. Так, конечными являются множество дней недели, множество месяцев в году, а бесконечными — множество точек на прямой, множество натуральных чисел.

Основными операциями с множествами являются: *объединение, пересечение, вычитание, дополнение подмножества до множества, декартово произведение элементов множеств.*

Далее будет подробно рассмотрена тема «Множество и операции над множествами»

Для ряда числовых множеств в математике приняты стандартные обозначения:

**N** — множество натуральных чисел;

**Z** — множество целых чисел;

**Q** — множество рациональных чисел;

**R** — множество действительных чисел

**Счет** - первая и основная математическая деятельность, основанная на поэлементном сравнении конечных множеств. Характеризуя это понятие, прежде всего, следует подчеркнуть, что это есть установление взаимно- однозначного соответствия между двумя множествами.

В истории развития человечества долгое время использовался дочисловой счет. Человек сравнивал множества, констатировал их равночисленность (равенство) или не равночисленность *(столько же, меньше, больше).*

С появлением натуральных чисел человек в качестве одного из множеств стал использовать числовой ряд.

**Число** - показатель мощности прерывной или непрерывной величины(множества). Число всегда есть отношение этой величины к избранной мере, поэтому число не является постоянной характеристикой, оно относительно к той единице, которая принимается за меру (считать можно парами, десятками; измерять можно разными мерами, а результат будет разный).

Понятие **величина** в математике рассматривается как основное. Возникло оно в глубокой древности и на протяжении истории развития общества подвергалось ряду обобщений и конкретизации.

**Величина** - это и протяженность, и объем, и скорость, и масса, и число, и т.д. В данном же случае мы сужаем понятие «величина» и будем характеризовать им только размер предметов.

Величина предмета — это его относительная характеристика, подчеркивающая протяженность отдельных частей и определяющая его место среди однородных.

Величина предмета определяется человеком только в сравнении с другой величиной — **мерой.**

***Мера*** является эталоном величины. В качестве эталонов величины выступают наши представления об отношениях между предметами и обозначаются словами, указывающими на место предмета среди других *(большой, маленький, высокий, длинный, короткий, толстый, тонкий* и т.д.).

Характеристика величины предмета зависит также от расположения его в пространстве. Один и тот же предмет может характеризоваться то как *высокий (низкий),* то как *длинный (короткий).* Это зависит от того, в горизонтальном или вертикальном положении он находится. Начальному выделению величины, возникновению элементарных представлений о ней способствуют предметные действия, включающие различные виды непосредственного сопоставления объектов между собой по их величине (накладывание, прикладывание, приставление), а также опосредованное сравнение с помощью измерения.

**Измерение** - один из видов математической деятельности. С помощью измерения определяется непрерывная величина: масса, объем, протяженность. В истории развития человеческого общества счет и измерение были, конечно, самыми первыми видами математической деятельности, тесно связанными с элементарными потребностями человека, и прежде всего с определением площадей земельных участков, вместимости сосудов и др.

**Решение типовых заданий**.

1.Назовите существенные свойства понятия:

а) треугольник;

б) окружность.

*Решение.*

а)геометрическая фигура на плоскости, 3 точки, 3 последовательно соединяющие отрезки,3 угла;

б)множество точек на плоскости, равноудаленность всех точек от одной точки, центр окружности.

2.Каков объем понятия: а) однозначное число;

б) натуральное число;

в)треугольник;

г) равносторонний треугольник.

*Решение.*

а) всевозможные числа записанные одной цифрой,

б)число используемое при счете,

в)все виды треугольников разной природы (прямоугольные, остроугольные, тупоугольные, равносторонние, разносторонние),

г)треугольники любой природы(деревянные, стальные, пластиковые и т.д.)с равными сторонами.

3.Находятся ли в отношении рода и вида следующие пары понятий:

а) многоугольник и треугольник;

б) угол и острый угол;

в) луч и прямая;

г) ромб и квадрат;

д) круг и окружность?

*Решение.*

а)да, так как треугольник можно определить через многоугольник,

б)да, понятие угол является родовым для понятия острый угол,

в)нет, понятие луч не является родовым для понятия прямая;

г)да, понятие ромб является родовым для понятия квадрат,

д)нет.

4.Приведите примеры понятий, отношения между объемами которых изображены на рис. 3, *а, б*.

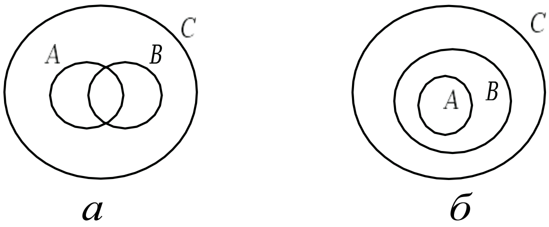



Рис. 3.

*Решение.*

*а)* С-множество натуральных чисел, А-множество четных натуральных чисел, В-множество натуральных чисел кратных 3;

б) С-множество четырехугольников, В-множество прямоугольников, А-множество квадратов.

5.Среди понятий, изучаемых в начальном курсе математики, есть такие, как «четное число», «треугольник», «многоугольник», «число», «трехзначное число», «прямой угол», «выражение».», «слагаемое», «выражение». Есть ли среди них понятия, находящиеся в отношении:

а) рода и вида;

б) целого и части?

*Решение.*

а) есть, род-число, вид-четное число, трехзначное число; род-многоугольник, вид-треугольник; род-выражение, а вид-сумма;

б) есть, целое-число, а часть-четное, трехзначное; целое- сумма, а часть-слагаемое; целое-треугольник, часть- прямой угол.

6.В следующих определениях выделите определяемое и определяющее понятия, родовое понятие (по отношению к определяемому) и видовое отличие:

а) «Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны»;

б) «Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется его средней линией».

*Решение*

а) определяемое понятие-параллелограмм, определяющее-четырехугольник, понятие четырехугольник родовое понятие по отношению к понятию параллелограмм, видовое отличие-у параллелограмма противоположные стороны попарно параллельны.

б) определяемое-средняя линия треугольника, определяющее-отрезок; родовое понятие- отрезок, видовое отличие-соединяющий середины двух сторон треугольника.

7.Есть ли логические ошибки в следующих определениях? Если можете, исправьте их.

а) «Прямоугольником называется четырехугольник, у которого противоположные стороны равны»;

б) «Биссектрисой угла называется прямая, делящая угол пополам»;

в) «Сложением называется действие, при котором находят сумму чисел»;

г) «Равносторонним треугольником называется треугольник, у которого равны все стороны и все углы».

*Решение.*

а) есть, «*Прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы прямые»*;

б) есть, «*Биссектрисой угла называется луч выходящий из вершины угла и делящий угол пополам»;*

в) есть,«*Сложением называется арифметическое действие, посредством которого находят результат складывания двух или нескольких чисел»;*

г) есть, «*Равносторонним треугольником называется треугольник, у которого равны все стороны».*

**Задания для самостоятельного решения.**

1.Дайте определение понятий: параллелограмм, отрезок, прямоугольник, простое число; прямой угол; нечетное число, двузначные числа.

2.Начертите три геометрические фигуры, принадлежащие объему понятия:

а) параллелограмм;

б) трапеция;

в) окружность.

3.Назовите несколько свойств, общих для прямоугольника и квадрата.

Какое из следующих утверждений верное:

а) «Всякое свойство квадрата присуще прямоугольнику»;

б) «Всякое свойство прямоугольника присуще квадрату»?

4.Изобразите с помощью кругов Эйлера отношения между объемами понятий $a$, $b$ и $c$, если:

а) $a$ - «четырехугольник», $b$-«трапеция», $c$-«прямоугольник»;

б) $a$ — «натуральное число, кратное 3»; $b$ — «натуральное число, кратное 4»; $c$ — «натуральное число, кратное 2»;

*в)$a$* — «треугольник»; $b$ — «равнобедренный треугольник»; $c$ — «равносторонний треугольник».

5.Назовите все свойства, которые содержатся в видовом отличии каждого из следующих определений:

а) «Биссектрисой угла называется луч, выходящий из вершины угла и делящий угол пополам»;

б) «Прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются».

6.Соразмерны ли следующие определения:

а) «Остроугольным треугольником называется треугольник, у которого есть острый угол»;

б) «Прямоугольным треугольником называется треугольник, у которого есть прямой угол».

7.Дайте определение: тупоугольного треугольника, равнобедренного треугольника, трапеции. Какое понятие вы выбрали в качестве родового в каждом случае? Какие свойства включили в видовое отличие?

8.Сформулируйте определение прямоугольника, используя в качестве родового понятие «четырехугольник». Пользуясь этим определением, объясните, почему фигуры $F_1$, $F_3$ и $F_4$, изображенные на Рис. .4, можно назвать прямоугольниками, а фигуру $F_2$ — нет.

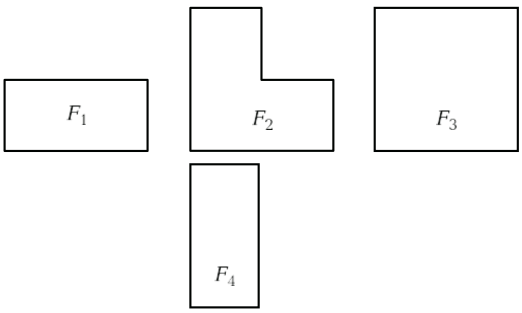



Рис.4

9.Понятие «противоположные стороны прямоугольника» в начальном курсе математики можно определить так: «Красным цветом обозначены две противоположные стороны прямоугольника, а синим цветом — две другие противоположные стороны» (все это показано на рисунке). Какой способ определения понятия использован?

10.Выясните, каким способом определяются в различных учебниках по математике для начальных классов понятия:

а) выражение;

б) сумма;

в) слагаемое;

г) четное число;

д) однозначное число;

е) умножение.

**Вопросы теории.**

1.Какие основные понятия вы знаете? Чем характеризуется понятие? Что такое объем понятия, содержание понятия?

2.Какие виды определения понятий вы знаете? Назовите требования к определению понятий.

3.Какие способы раскрытия содержания понятий чаше используются в начальной школе?

4.Что такое множество, какие операции можно совершать над множествами?

5.Дайте характеристику понятия величина, мера.

**Литература:**

1. Аматова Г.М., Аматов М.А.: Математика. Упражнения и задачи. – М.: Академия 2008.-С58-64.

2.Аматова Г.М., Аматов М.А.: Математика. – М.: Академия 2008.

3.Стойлова Л.П. Математика. – М.: Академия. 2013. - 463 с.

## Тема 2. Высказывания и логические операции над ними.

1.Высказывания.

2.Логические операции над ними.

### 2.1 Высказывания.

Изучая реальные процессы, математика описывает их, используя как естественный словесный язык, так и свой символический. Описание строится с помощью предложений. Но чтобы математические знания были достоверными, правильно отражали окружающую нас реальность, эти предложения должны быть истинными.

Как узнать, истинное или ложное знание заключено в том или ином математическом предложении? На этот и другие вопросы, с ним связанные, мы попытаемся ответить. А сейчас только заметим, что каждое математическое предложение характеризуется содержанием и логической формой (структурой), причем содержание неразрывно связано с формой, и нельзя осмыслить первое, не понимая второго.

Относительно понятий и отношений между ними можно высказывать различные суждения. Языковой формой суждений являются повествовательные предложения. Например, в начальном курсе математики можно встретить такие предложения:

1) число 12 четное;
2) $2+5<8$;
3) $x+5=8$;
4) в числе 15 один десяток и 5 единиц;
5) от перестановки множителей произведение не изменяется;
6) некоторые числа делятся на 3.

Видим, что предложения, используемые в математике, могут быть записаны как на естественном (русском) языке, так и на математическом, с использованием символов. О предложениях 1, 4, 5 и 6 можно сказать, что они несут верную информацию, а предложение 2 — ложную. Относительно предложения $x+5=8$ вообще нельзя сказать: истинное оно или ложное.

Повествовательные предложения, используемые в математике называют *высказываниями.*

Под ***высказыванием*** понимают всякое повествовательное предложение, о котором имеет смысл говорить: истинно оно или ложно.

Высказывания обозначают буквами латинского алфавита: ***А,В,С,Д,Е*** ... или ***p,q…*** .

Истинные высказывания будем обозначать символом **И**, ложные- символом **Л**.

Предложения (высказывания), которые мы рассматривали, были простыми, но можно привести примеры суждений, языковой формой которых будут сложные предложения. Например: «Число 12 четное и делится на 3»; «Если треугольник равнобедренный, то углы при основании в нем равны».

Естественно возникает вопрос: как определять значение истинности таких высказываний?

Чтобы ответить на этот вопрос, познакомимся с некоторыми логическими понятиями.

В логике считают, что из двух данных предложений можно образовать новые предложения, используя для этого союзы *«и», «или», «если…, то…», «тогда и только тогда, когда»* и др. С помощью частицы *«не»* или словосочетания *«неверно, что»* можно из одного предложения получить новое.

Слова *«и», «или», «если…, то…», «тогда и только тогда, когда»,* а также частицу *«не»* (слова *«неверно, что»*) называют ***логическими связками***.

Предложения, образованные из других предложений с помощью логических связок, называют ***составными***. Предложения, не являющиеся составными, называют ***элементарными***.

Приведем пример составного предложения:

«Число 28 четное и делится на 7».

Это предложение образовано из двух элементарных: «число 28 четное», «число 28 делится на 7» с помощью логической связки «и».

А как определять *значение истинности* составного высказывания?

Например, истинно или ложно высказывание: «Число 28 делится на 7 и на 9»? Элементарное высказывание «Число 28 делится на 7», входящее в составное высказывание является истинным — это известно из начального курса математики. Второе элементарное высказывание

«Число 28 делится на 9» — ложное (и это нам также известно). А каким будет в этом случае значение истинности составного высказывания, образованного из этих высказываний с помощью союза «и»?

Ответить на данный вопрос можно, если знать смысл этого союза. Но так как составные высказывания образуются с помощью и других логических связок, то возникает необходимость в уточнении их смысла.

*Кроме того, уточнение смысла используемых в математике связок обусловлено их неоднозначным толкованием в обыденной речи, что может привести к неоднозначному ответу при нахождении значения истинности составных высказываний.*

Итак, значение истинности элементарного высказывания определяют, исходя из его содержания с опорой на известные знания.

Чтобы определить значение истинности составного высказывания, надо знать смысл логических связок, с помощью которых оно образовано из элементарных, и уметь выявлять логическую структуру высказывания.

Для выявления логической структуры составного предложения нужно установить:

- из каких элементарных предложений образовано данное составное предложение;
- с помощью каких логических связок оно образовано.

Выявим, например, логическую структуру предложения *«Если углы вертикальные, то они равны»*. Оно состоит из двух элементарных предложений: предложения ***p*** — «Углы вертикальные» и предложения ***q*** — «углы равны». Соединены они в одно составное предложение с помощью логической связки «если…, то…». Говорят, что данное составное предложение имеет логическую структуру (форму): «если ***p***, то ***q***».

### 2.2 Логические операции над высказываниями.

Как было отмечено, используя союзы и союзные слова «не», «и», «или», «если, то», «тогда и только тогда» можно составить составные высказывания или так называемые логические операции над простыми высказываниями. Дадим определение логической операции отрицание.

Как было отмечено, используя союзы и союзные слова «не», «и», «или», «если, то», «тогда и только тогда» можно составить составные высказывания или так называемые логические операции над простыми высказываниями. Дадим определение логической операции отрицание.

***Отрицанием*** высказывания $A$ называют высказывание $\overline{A}$, которое ложно, если высказывание $A$ истинно, и истинно, если высказывание $A$ — ложно.

Таблица истинности отрицания имеет вид:

| $A$ | $\overline{A}$ |
|---|---|
| и | л |
| л | и |

Из данного определения следует, что предложение и его отрицание не могут быть ни одновременно истинны, ни одновременно ложны.

Построим, например, отрицание ложного высказывания «Число 28 делится на 9»:

а) «число 28 не делится на 9»;

б) «неверно, что число 28 делится на 9».

Высказывания, которые мы получили, истинные. Значит, отрицание данного предложения построено правильно.

***Конъюнкцией высказываний*** $p$ и $q$ называют высказывание $p \wedge q$, которое истинно, когда оба высказывания истинны, и ложно, когда хотя бы одно из этих высказываний ложно.

Определение конъюнкции можно записать с помощью таблицы, называемой *таблицей истинности*:

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| и | и | и |
| и | л | л |
| л | и | л |
| л | л | л |

Используя данное определение, найдем значение истинности высказывания «Число 28 делится на 7 и на 9», которое, как было установлено ранее, состоит из двух элементарных высказываний, соединенных союзом «и», т. е. является конъюнкцией. Так как первое высказывание истинно, а второе ложно, то, согласно определению конъюнкции, высказывание «число 28 делится на 7 и на 9» будет ложным.

Заметим, что в речи конъюнкция может выражаться не только союзом «и», но и другими, например, «а», «но», «однако», «не только…, но и…». Например: «Число 15 делится не только на 3, но и на 5».

Выясним теперь, какой смысл имеет в математике союз «или».

Пусть $p$ и $q$ — произвольные высказывания. Образуем из них с помощью союза «или» составное высказывание. Полученное высказывание называют **дизъюнкцией** (от лат. *disjunctio* — разделение) и обозначают $p \vee q$ (читают: «$p$ или $q$ »).

***Дизъюнкцией*** высказываний $p$ и $q$ называют высказывание $p$ **V** $q$, которое истинно, когда истинно хотя бы одно из этих высказываний, и ложно, когда оба высказывания ложны.

Таблица истинности дизъюнкции имеет вид:

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| и | и | и |
| и | л | и |
| л | и | и |
| л | л | л |

Используя данное определение, найдем значение истинности высказывания «*Число 28 делится на 7 или на 9». Так как это предложение является дизъюнкцией двух высказываний, одно из которых истинно, то, согласно определению, оно истинно.

Из определения дизъюнкции следует, что в математике союз «или» используют как неразделительный, т. е. допускается возможность одновременного выполнения обоих условий. Так, высказывание «15 кратно 3 или 5», согласно определению, считают истинным, поскольку оба высказывания «15 кратно 3» и «15 кратно 5» истинны.

Мы узнали, что с помощью логических операций из элементарных высказываний образуются более сложные – *составные* высказывания.

Конечную последовательность букв, знаков операций и скобок, определяющих структуру высказывания, называют *формулой* логики высказываний. Две формулы называют *равносильными*, если при любых наборах переменных высказываний их значения истинно совпадают.

Рассмотрим теперь *правила построения отрицания конъюнкции и дизъюнкции высказываний*. Если перед всем составным высказыванием поставить слова «неверно, что», то, безусловно, получим его отрицание. А как быть с частицей «не»? Можно ли ее поставить перед сказуемым составного предложения и получить его отрицание? Возьмем, например, высказывание «Число 28 делится на 9 и на 4». Оно ложное, так как представляет собой конъюнкцию двух высказываний, одно из которых ложно. Поставив перед сказуемым этого высказывания частицу «не», получим конъюнкцию «Число 28 не делится на 9 и на 4», в которой одно из предложений «Число 28 не делится на 4» — ложное и, значит, ложно построенное с помощью частицы «не» предложение. Поэтому оно не является отрицанием высказывания «Число 28 делится на 9 и на 4».

Можно доказать, что *отрицанием конъюнкции* двух высказываний ***p*** и ***q*** является *дизъюнкция* их отрицаний. Для этого необходимо убедиться в том, что значения истинности высказываний вида $\overline{p\wedge q}$ и $\overline{p} \vee \overline{q}$ совпадают при любых значениях истинности высказываний $p$ и $q$ . Сделать это можно с помощью таблицы истинности:

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $\overline{p \wedge q}$ | $\overline{p}$ | $\overline{q}$ | $\overline{p} \vee \overline{q}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| и | и | и | л | л | л | л |
| и | л | л | и | л | и | и |
| л | и | л | и | и | л | и |
| л | л | л | и | и | и | и |

Про высказывания вида $\overline{p} \wedge \overline{q}$ *и* $\overline{p \vee q}$ говорят, что они равносильны, и пишут $\overline{p} \wedge \overline{q} \Leftrightarrow \overline{p \vee q}$.

Эти равносильности носят название законов де Моргана.

Из них вытекает следующее **правило построения отрицания конъюнкции и дизъюнкции:** *чтобы построить отрицание конъюнкции* (*дизъюнкции*), *достаточно заменить отрицаниями составляющие ее высказывания, а союз «и»* (*«или»*) *заменить союзом «или»* (*«и»*).

***Импликацией*** двух высказываний ***p*** и ***q*** называют высказывание ***p =>q***, ложное тогда и только тогда, когда ***p*** истинно, а ***q*** ложно.

***Эквиваленцией*** двух высказываний *p* и *q* называют высказывание ***p<=>q***, истинное тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны или ложны одновременно.

Данные выше определения представим в виде таблицы

| $p$ | $q$ | $\overline{p}$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \Rightarrow q$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| И | И | Л | И | И | И | И |
| И | Л | Л | Л | И | Л | Л |
| Л | И | И | Л | И | И | Л |
| Л | Л | И | Л | Л | И | И |

Мы рассматривали различные виды математических предложений и выяснили, что среди них выделяют высказывания, которые могут быть элементарными и составными. Мы узнали также, как устанавливают значение истинности таких высказываний.

Но этим не исчерпано все многообразие формулировок математических предложений и правил обращения с ними. Например, почему одну и ту же теорему о равенстве вертикальных углов можно формулировать по-разному:

- «Вертикальные углы равны»;
- «Если углы вертикальные, то они равны»;
- «Для того чтобы углы были равны, достаточно, чтобы они были вертикальными»;
- «Для того чтобы углы были вертикальными, необходимо, чтобы они

были равны».

Возникают и другие вопросы: почему истинность предложения «сумма трех любых последовательных натуральных чисел делится на 3» надо доказывать, а чтобы убедиться в истинности предложения «некоторые натуральные числа делятся на 3», достаточно привести конкретный пример?

Чтобы ответить на эти вопросы, необходимо более глубокое изучение математических предложений и, прежде всего, высказываний с кванторами.

Заметим, что в математике наряду со словом «всякий» употребляют слова «каждый», «любой», а вместо слова «существует» используют слова «некоторые», «найдется», «есть», «хотя бы один».

Обратим внимание на особенность употребления в математике слова «*некоторый*». В обычной речи, говоря «некоторые», имеют в виду «по меньшей мере один, но не все», в математике же слово «некоторые» означает «по меньшей мере один, но, может быть, и все».

Например, свойство противоположных сторон прямоугольника формулируется так: «В ***любом*** прямоугольнике противоположные стороны равны», а о свойстве натуральных чисел мы говорили, что «***некоторые*** натуральные числа кратны 5».

Выясним, каков смысл этих слов и как он используется в математике. В математике эти слова называют *кванторами*. Слова *любое, для любого, для всякого, все, всякий* называют **квантором общности** обозначают символом $\forall$.

В математике говорят, что *истинность высказывания с квантором общности устанавливается путем доказательства. Показать ложность таких высказываний можно, приведя* ***контрпример.***

Слова *существует, некоторые, для некоторых* называют **квантором существования**, обозначают символом $\exists$.

Истинность высказывания с квантором существования доказывают приведя один пример.

*Рассмотрим пример.* Установить, истинны или ложны следующие высказывания:

а) «Среди треугольников есть прямоугольные»;

б) «Некоторые прямоугольные треугольники являются равносторонними».

*Решение.*

а) Данное высказывание содержит квантор существования, который выражен словом «есть». Чтобы убедиться в истинности такого высказывания, достаточно привести пример. В данном случае прямоугольный треугольник можно начертить.

б) В этом случае квантор существования выражен словом «не- которые». Если считать данное высказывание истинным, то нужно привести пример, т. е. попытаться начертить треугольник, который был бы одновременно прямоугольным и равносторонним. Из того, что это не удается сделать, еще не следует вывод о ложности данного высказывания. В этом надо убедиться путем доказательства.

Действительно, если треугольник прямоугольный, то в нем один угол равен 90°, а в равностороннем все углы 60°. Следовательно, ни один прямоугольный треугольник не может быть равносторонним. Поэтому данное высказывание ложное.

*Итак, истинность высказывания с квантором существования устанавливается с помощью конкретного примера. Чтобы убедиться в ложности такого высказывания, необходимо провести доказательство.* Заметим, что убедиться в ложности высказывания — значит, *опровергнуть* его.

***Решение типовых заданий***

1.Среди нижеследующих предложений выделим высказывания. Определим, какие из них являются истинными, а какие ложными.

*а)* «Спешите делать добро!»

*б)* «Закон всемирного тяготения открыл И. Ньютон.»

в) «В солнечную погоду полезны темные очки.»

*Решение.* Из всех предложений высказываниями являются только *б), в).* Высказывания *б)* и *в)* являются истинными; предложение *а)* не является высказыванием.

2.Среди нижеследующих предложений выделим высказывания. Определим, какие из них являются истинными, а какие ложными.

г) «Когда вы будете в Париже?»

*д) «*Число 9 является простым.»

е) «Сегодня был вкусный обед».

*Решение.*

Из всех предложений высказываниями являются только *д)* высказывание и оно ложное. Вопросительное предложение *г)* не является высказыванием. Предложение *е)* не является высказыванием из-за субъективности понятия «вкусный обед».

3**.** Построить отрицание высказывания «Некоторые однозначные числа делятся на 10».

*Решение.*

*I способ.* Поставим перед высказыванием слова « неверно, что». Получим высказывание «Неверно, что некоторые однозначные числа делятся на 10», которое является отрицанием данного.

*II способ.* Заменим квантор существования (он выражен словом «некоторые») на квантор общности «все» и построим отрицание предложения, стоящего после слова «некоторые», поставив частицу «не» перед сказуемым. Получим высказывание «Все однозначные числа не делятся на 10».

4. Построить отрицание высказывания «Число 28 делится на 9 или на 6».

*Решение.*

*I способ.* Поставим перед данным высказыванием слова «неверно, что». Получим высказывание «неверно, что число 28 делится на 9 или на 6», которое является отрицанием исходного.

*II способ.* Воспользуемся законом де Моргана: заменим высказывания «Число 28 делится на 9» и «Число 28 делится на 6» их отрицаниями, а союз «или» поменяем на союз «и». Получим высказывание «Число 28 не делится на 9 и не делится на 6», которое также является отрицанием исходного.

5.Сформулируем высказывания, соответствующие формулам: *а)* $\widehat{pq}$; *б)* $\overline{pq}$;

*в)* $p => q$; *г)* $p <=> q$, если $p$ - «Гремит гром», а $q$ — «Моросит дождь».

*Решение. а)* $\widehat{pq}$ «Гремит гром и моросит дождь»;

*б)* $\overline{pq}$; «Не верно, что гремит гром и моросит дождь»;

*в*) $p => q$ «Если гремит гром, то моросит дождь»;

*г) p <=> q* — «Гром гремит тогда и только тогда, когда моросит дождь».

6.Выясним, какие из ниже приведенных высказываний, взятых из учебников математики для начальных классов, содержат (в явном или не явном виде) квантор и как следует устанавливать их значение истинности (указать только способ и обосновать выбор).

а) «От перестановки мест слагаемых сумма не изменяется». В данном случае содержит квантор «всеобщности» ∀, т.к по основному свойству сложения: (∀a, b), a+b= b+a.

б) «Существуют четные числа». Здесь содержится квантор существования ∃**.** Достаточно привести одно или два числа четных (2;8) чтобы показать истинность этого высказывания.

в) «Некоторые числа делятся на 4». В данном случае квантор существования ∃ выражен словом «некоторые». Достаточно привести пример хотя бы одного числа которое делится на 4, чтобы установить, что данное высказывание истинно.

г) «Некоторые прямоугольные треугольники являются равносторонними». В этом случае квантор существования ∃ заменен словом «некоторые». Если считать данное высказывание истинным, то нужно привести пример, т.е. попытаться начертить треугольник, который был бы одновременно прямоугольным и равносторонним. Это не треугольник прямоугольный, то в нем один угол равен $90^{o}$, а в равностороннем треугольнике все углы $60^{o}$.

Следовательно, ни один прямоугольный треугольник не может быть равносторонним.

**Задания для самостоятельного решения**

1.Среди следующих предложений, рассматриваемых в начальном курсе математики, укажите высказывания и определите их значение истинности:

а) «(12 - 7) · (6 + 3) = 45»;

б) «(15 - 12): 3 = 10»;

в) «В любом прямоугольнике противоположные стороныравны»;

г) «(12 + *x*): 4 = 24»;

д) «Среди четырехугольников есть такие, у которых все стороны равны»;

е) «Число $z$ — двузначное»;

ж) «Произведение чисел 4070 и 8 меньше, чем сумма чисел 18 396 и 14 174»;

з) «Число 6 является корнем уравнения $(12 - x) \cdot 4 = 24$».

2.Можно ли считать высказываниями следующие записи:

а) $x^2 + 2x$; б) $4x - 2y$; в) $7 + 4 : 2 = 30$; г) $7 - 4 \times 2 = 30$?

3.В следующих составных предложениях выделите составляющие их элементарные предложения и логические связки:

а) «В равнобедренном треугольнике $ABC$ биссектриса $BD$ является медианой и высотой»;

б) «Если запись числа оканчивается цифрой 0, то число делится на 5»;

в) «Треугольник является равносторонним тогда и только тогда, когда все его углы равны»;

г) «Не верно, что число 17 делится на 3»;

д) «Если $a = b = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$».

4. «Известно, что высказывание $A$ — истинно. Можно ли, зная лишь это, определить значение истинности высказывания: а) $A \wedge B$;

б) $A \vee B$?»

5. «Известно, что высказывание $A$ — ложно. Можно ли, зная лишь это, определить значение истинности высказывания:

а) $A \wedge B$;

б) $A \vee B$?»

6. «Определите значение истинности каждого высказывания:»

а) «Число 6 делится на 2 и на 3»;

б) «Число 123 делится на 3 и на 9»;

в) «При делении 42 на 5 в остатке получится 2 или 5»;

г) «$3 < 7$»;

е) «$7 < 3$»

7. «Пусть $A$ — множество четных натуральных чисел, $B$ — множество натуральных чисел, меньших 20. Установите, какие из следующих высказываний истинны»:

а) $5 \in A$ или $5 \in B$;

б) $5 \in A$ и $5 \in B$;

в) $8 \in A$ или $8 \in B$;

г) $8 \in A$ и $8 \in B$;

д) $44 \in A$ или $44 \in B$;

е) $44 \in A$ и $44 \in B$;

ж) $51 \in A$ или $51 \in B$;

з) $51 \in A$ и $51 \in B$.

8. «Даны числа: 31, 53, 409, 348, 20, 3094, 233, 33, 271,143, 3, 333, 14, 30»

1) «Выпишите все числа, в записи которых:»

а) «три цифры и есть цифра 3»;

б) «три цифры или есть цифра 3»;

2) «Из ряда 25, 12, 17, 5, 15, 36 выпишите числа»:

а) «двузначные или меньшие 17»;

б) «двузначные и меньшие 17».

9. Сформулируйте, используя законы де Моргана, отрицания следующих высказываний:

а) «Четырехугольник *ABCD* — прямоугольник или параллелограмм»;

б) «Число 12 — четное и делится на 3».

10. «Какие из нижеприведенных предложений являются отрицанием высказывания «Все натуральные числа кратны 5 (свой выбор обоснуйте)»:

а) «Все натуральные числа не кратны 5»;

б) «Существуют натуральные числа, не кратные 5»;

в) «Существуют натуральные числа, кратные 5»;

г) «Неверно, что все натуральные числа кратны 5»;

д) «Не все натуральные числа кратны 5».

11. Постройте двумя способами отрицание высказывания:

а) «Всякое свойство квадрата присуще прямоугольнику»;

б) «Некоторые простые числа являются четными.

12. Определите, являются ли данные предложения отрицаниями друг друга или нет (объясните — почему):

а) «Число 12 — четное, Число 12 — нечетное»;

б) «Все простые числа нечетны, Все простые числа четные»;

в) «Все простые числа нечетны, Существуют четные простые числа»;

г) «Некоторые углы острые, Некоторые углы тупые».

13.Переформулируйте данные предложения так, чтобы они не содержали слов неверно, что, но имели тот же смысл:

а) «Неверно, что число 9 — четное или простое»;

б) «Неверно, что треугольник *ABC* — равнобедренный и прямоугольный»;

в) «Неверно, что каждый четырехугольник является прямоугольником»;

г) «Неверно, что хотя бы в одном прямоугольнике диагонали взаимно перпендикулярны».

**Вопросы теории.**

1.Что называют высказыванием?

2. Что называется отрицанием высказывания?

3.Дайте определения конъюнкции, дизъюнкции. Приведите доказательства истинности.

4. Запишите определение конъюнкции и дизъюнкции с помощью таблицы.

5.Что называют импликацией и эквиваленцией высказываний?

6.Записать формулы равносильности. Привести примеры тавтологии.

**Литература.**

1.Аматова Г.М., Аматов М.А.: Математика. – М.: Академия 2008.

2.Аматова Г.М.,Аматов М.А.: Математика. Упражнения и задачи. – М.: Академия 2008.-С.33-64.

3.Стойлова Л.П. Математика. – М.: Академия. 2013. - 463 с

## Тема 3. Элементы теории множеств

1. Множество. Способы задания множеств.
2. Отношения между множествами
3. Операции над множествами

### 3.1 Множество. Способы задания множеств.

Понятие «множество» является основным понятием математики.

**Множество** — это совокупность объектов, которые рассматриваются как единое целое.

Мир, в котором живет человек, представлен разнообразными множествами: множество звезд на небе, растений, животных вокруг него, множество разных звуков, частей собственного тела. Множество характеризуется различными свойствами, т.е. множество задано некоторыми характеристиками. Под этими **характеристиками** подразумеваются такие свойства, которыми владеют все объекты, принадлежащие данному множеству, и не владеет ни один предмет, который не принадлежит ему, т.е. этот предмет не является его элементом. Множество может быть охарактеризовано натуральным числом. В таком случае считают, что число обозначает *мощность множества.* Примеры множеств:

1. Множество гласных букв русского алфавита.
2. Множество учащихся класса, школы.
3. Множество корней уравнения.
4. Множество звезд на небе.
5. Множество столов в аудитории и т.д.

В нашей повседневной жизни мы вместо слова «множество» говорим «табун», «стадо», «набор», «собрание» и т.д.

Предметы любой природы, составляющие множество, называют *элементами* множества. Это может быть числа, люди, звезды, деревья и т.д.

Например:

1. Число 5 является элементом множества натуральных чисел.
2. Корова является элементом множества коров (стада).

3. Звезда является элементом множества звезд на небе.
4. Клен является элементом множества деревьев.
5. Лампочка является элементом множества лампочек и т.д.

В рассмотренных примерах слова: *является элементом* можно заменить одним словом *принадлежит*.

1. Число 5 *принадлежит* множеству натуральных чисел.
2. Корова *принадлежит* множеству коров.
3. Звезда *принадлежит* множеству звезд на небе.
4. Клен *принадлежит* множеству деревьев.
5. Лампочка *принадлежит* множеству лампочек и т.д.

Для сокращенной записи данных утверждений используется следующая символика: множества обозначаются большими буквами латинского алфавита (A,B,C) их элементы – малыми (a,b,c,d), а слово «*принадлежит*» – значком $\in$.

1. $5 \in N$, где $N$– множество натуральных чисел, 5 – натуральное число.
2. $a \in M$, где $M$– множество коров, $a$ – корова.
3. $b \in P$, где $P$– множество звезд, $b$ – звезда.
4. $c \in F$, где $F$– множество деревьев, $c$ – дерево.
5. $d \in K$, где $K$– множество лампочек, $d$ – лампочка.

Если же предмет $a$ не принадлежит конкретному множеству, то используют значок $\notin$. Запись $m \notin Q$ читают так: «Элемент $m$ не принадлежит множеству $Q$. Например, $\frac{5}{7} \notin N$; $-7 \notin N$; $0{,}6 \notin N$.

Элементами множества могут являться множества.

Примеры:

1. Множество классов в школе, где школа – множество, а класс – элемент.
2. Множество факультетов в институте, где институт – множество, а факультет – элемент.

Существуют числовые множества, для которых имеются специальные обозначения:

1. $N$ – множество всех натуральных чисел.
2. $Z_0$ – множество целых неотрицательных чисел.

3. $Z$ – множество всех целых чисел.
4. $Q$ – множество всех рациональных чисел.
5. $R$ – множество всех действительных чисел.

Множества бывают: *конечные*, *бесконечные* и *пустые*.

Примеры:

1. Множество студентов на факультете – конечное множество.
2. Множество звезд на небе – бесконечное множество.
3. Множество людей на Солнце – пустое множество.

Пустое множество обозначают символом $\emptyset$.

*Способы задания множеств. Равные множества.*

Говорят, что множество задано, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он данному множеству или не принадлежит.

Существуют **два способа** задания множества:

а) *перечислением элементов множества.*

б) *указанием характеристического свойства элементов множества.*

Первый способ задания множества применим только для конечных множеств, причем число элементов множества должно быть невелико. Например, множество $A$ состоит из элементов $a, b, c, d, e, f$. Записывают это так: $A = \{a, b, c, d, e, f\}$.Читают так: «Множество $A$ состоит из элементов $a, b, c, d, e, f$».

Второй способ – указанием характеристического свойства элементов множества. Он используется для задания множеств, содержащих как конечное число элементов, так и бесконечное число элементов.

*Характеристическое свойство элементов множества – это свойство, которым обладают элементы данного множества, и только они.*

Например, множество $B$ состоит из натуральных чисел, больших 3, но меньших 9. Здесь характеристическим свойством всех элементов множества $B$ является свойство быть натуральным числом большим 3, но меньшим 9. В данном случае элементы множества $B$ можно перечислить: $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$.

Множество, для элементов которого указано характеристическое свойство, например в данном случае, записывают так: $B = \{x | x \in N, 3 < x < 9\}$.

Если множество $\mathrm{C}$ – состоит из множества всех точек $M$, принадлежащих данному кругу радиуса $r$, то:1) это множество бесконечно и 2) характеристическое свойство этого множества – точки $M$ принадлежат кругу радиуса $r$. записывают так: $\mathrm{C} = \{M \ |OM| \le r\}$.

Два множества $A$ и $B$ называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Записывают это так: $A = B$. Например, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $\mathrm{B} = \{\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{16}, \sqrt{25}\}$ (здесь речь идет об арифмитическом значении корня).

## 3.2 Отношения между множествами.

*Подмножества. Диаграммы Эйлера – Венна.*

В математике изучают не только те или иные множества, но и отношения, взаимосвязи между ними. Например, нам известно, что все натуральные числа являются целыми. Понятие множества позволяет обобщить конкретные случаи взаимосвязи между различными совокупностями, посмотреть на них с единой точки зрения.

Пусть даны два множества $A$ и $B$. **Множество *B* называется *подмножеством* множества *A***, тогда и только тогда, когда каждый элемент множества $B$ принадлежит множеству $A$. Записывают это так: $B \subset A$. Читают: «Множество $B$ является подмножеством множества $A$» или «$B$ включено в множество $A$», а $A \supset B$ читают так: «Во множество $A$ включено множество $B$».

Из определения подмножества следует, что любое множество является подмножеством самого себя, т.е. $A \subset A$. Кроме того, пустое множество считается подмножеством любого множества, т.е. $\emptyset \subset A$.

Эти два подмножества называют *несобственными подмножествами*, а все остальные подмножества множества $A$ называют *собственными подмножествами*$A$.

Например, дано множество $A = \{1; 2; 3\}$. Найдем все подмножества данного множества $A$. Ими являются: $A$ и $\emptyset$ - несобственные подмножества и собственные подмножества: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1; 2\}, \{1; 3\}$, $\{2; 3\}$.

Вообще, если множество $A$ содержит $\boldsymbol{n}$ элементов, то у него $\mathbf{2}^n$ различных подмножеств. Доказательство этого утверждения здесь не приводим.

Понятия множества и подмножества используется при определении многих математических понятий, например, при определении геометрической фигуры.

**Геометрическая фигура** – это множество точек. Например, геометрическими фигурами являются: точка, отрезок, луч, прямая, треугольник, четырёхугольник, пирамида, конус, шар и т.д.

Пусть F и G две геометрические фигуры, причем, F является собственным подмножеством фигуры G. Говорят, что F есть *часть* фигуры G. Например, отрезок $CD$ – это часть прямой $CD$.

Часто бывает так, что рассматривают подмножества одного и только одного множества $I$. Это множество $I$ называют *универсальным* множеством.

Если множества $A$ и $B$ имеют общие элементы, т. е. элементы, принадлежащие одновременно $A$ и $B$, то говорят, что эти множества ***пересекаются***.

Например, если $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{b, d, k, m\}$, $C = \{x, y, z\}$, то можно утверждать, что множества $A$ и $B$ пересекаются, так как имеют общие элементы $b$ и $d$, а множества $A$ и $C$, $B$ и $C$ не пересекаются, поскольку не имеют общих элементов.

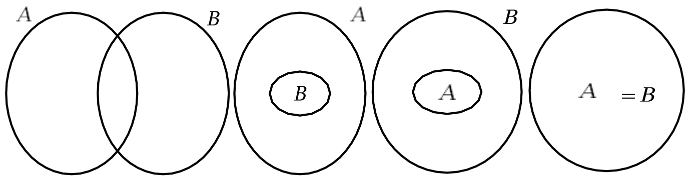
Рассмотрим множества $A = \{a, b, c, d, e\}$ и $B = \{c, a, d, b, e\}$.

Они пересекаются, и каждый элемент множества $A$ является элементом множества $B$, т. е. $A \subset B$, и наоборот, каждый элемент множества $B$ является элементом множества $A$, т. е. $B \subset A$. В этом случае говорят, что множества $A$ и $B$ **равны** и пишут $\boldsymbol{A = B}$.

Множества $A$ и $B$ называют ***равными***, если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Из определения следует, что *равные множества состоят из одних и тех же элементов, при этом порядок записи элементов множества не существен.*

Отношения между множествами наглядно представляют с помощью особых чертежей, называемых ***кругами Эйлера***. Для этого множества представляют в виде кругов (овалов). В том случае, если множества $A$ и $B$ имеют общие элементы, но ни одно из них не является подмножеством другого, их изображают так, как показано на рисунке 5, *а*. Если множество $B$ является подмножеством $A$, то круг, изображающий множество $B$, целиком находится в круге, изображающем множество $A$ (Рис.5, *б*). Если $A \subset B$, то множества $A$ и $B$ изображают так, как на рис.5, *в*. Равные множества представляют в виде одного круга (Рис.5, *г*).




*а* *б* *в* *г*

Рис.5

Если множества $A$ и $B$ не пересекаются, то их изображают в виде двух фигур, не имеющих общих точек (Рис.6).

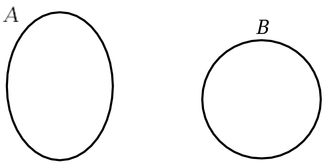



Рис.6

В начальном курсе математики с понятием подмножества младшие школьники встречаются, выполняя, например, задания: «Назови среди данных чисел четные», «Среди данных четырехугольников найди прямоугольники». Термины «множество» и «подмножество» при этом, как правило, не используются.

### 3.3 Операции над множествами.

***Пересечение множеств.***

***Пересечением*** двух множеств $A$ и $B$ называется множество $A \cap B$, которое содержит те и только те элементы, которые принадлежат и множеству $A$ имножеству $B$ одновременно. Кругами Эйлера – Венна изображают это так: Рис. 7.

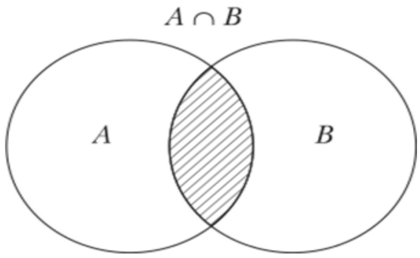



Рис.7

Символ $\cap$ – знак пересечения множеств. Определение пересечения двух множеств $A$ и $B$ можно записать так: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Запись

$A \cap B = \emptyset$ означает, что множества $A$ и $B$ *не пересекаются*, а запись

$A \cap B \neq \emptyset$ означает, что множества $A$ и $B$ имеют хотя бы один общий элемент или пересечение этих множеств *не пусто*.

Рассмотрим некоторые свойства *пересечения* множеств:

1)Пересечение двух множеств $A$ и $B$ обладает свойством коммутативности, т.е. для любых двух множеств $A$ и $B$ имеет место равенство $A \cap B = B \cap A$.Это свойство вытекает из определения пересечения двух множеств $A$ и $B$.

2)Если $A \subset B$, то $A \cap B = A$;

3)$A \cap A = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$ ; $A \cap I = A$.

4)Пересечение множеств обладает свойством ***ассоциативности***, т.е. для любых трех множеств $A$, $B$ и $C$ имеет место равенство:

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

Это свойство можно проиллюстрировать с помощью кругов Эйлера. Рассмотрим, например, ассоциативное свойство пересечения множеств.


*а* Рис.8 *б*

Изобразим множества $A$, $B$ и $C$ в виде трех попарно пересекающихся кругов (Рис.8).

В выражении $(A \cap B) \cap C$ скобки определяют следующий порядок действий: сначала выполняется пересечение множеств $A$ и $B$ (см. рис.8, *а*, вертикальная штриховка), а затем находят пересечение полученного множества и множества $C$. Если выделить множество $C$ горизонтальной штриховкой, то область, заштрихованная дважды, будет изображать множество $(A \cap B) \cap C$.

Представим теперь наглядно множество $A \cap (B \cap C)$. В соответствии с указанным порядком действий сначала надо найти пересечение множеств $B$ и $C$ (см. рис.8, *б*, вертикальная штриховка), а затем выполнить пересечение множества $A$ с полученным множеством. Если отметить множество $A$ горизонтальной штриховкой, то область, заштрихованная дважды, и будет изображать множество $A \cap (B \cap C)$. Видим, что области, представляющие на Рис.8 множества $(A \cap B) \cap C$ и $A \cap (B \cap C)$, одинаковы, что и подтверждает справедливость свойства ассоциативности для пересечения множеств.

Аналогично можно проиллюстрировать свойство ассоциативности и для объединения множеств.

***Объединение множеств.***

***Объединением*** двух множеств $A$ и $B$ называется множество $A \cup B$, которое содержит те и только те элементы, которые принадлежат или множеству или множеству $B$. Кругами Эйлера – Венна изображают это как на Рис. 9.

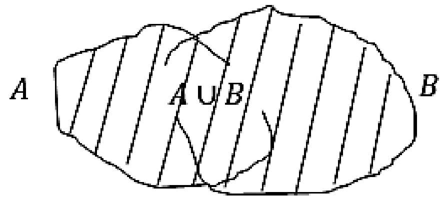



Рис.9

Символ $\cup$ – знак объединения множеств. Определение объединения двух множеств $A$ и $B$ можно записать так: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Рассмотрим некоторые свойства *объединения* множеств:

Из школьного курса математики нам известно, что операции над числами обладают рядом свойств. Например, сложение действительных чисел обладает переместительным и сочетательным свойствами: для любых действительных чисел $a$ и $b$ справедливо равенство $a + b = b + a$, а для любых чисел $a$, $b$ и $c$ — равенство $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Обладает ли этими же свойствами операция объединения множеств? Оказывается да. Рассмотрим эти свойства.

1) Объединение двух множеств $A$ и $B$ обладает свойством *коммутативности*, т.е. для любых двух множеств $A$ и $B$ имеет место равенство: $A \cup B = B \cup A$

Это свойство вытекает из определения объединения двух множеств $A$ и $B$.

2) Объединение множеств обладает свойством ***ассоциативности***, т.е. для любых трех множеств $A$, $B$ и $C$ имеет место равенство

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$

3) Если $B \subset A$, то $A \cup B = A$;

4) $A \cup A = A; A \cup \emptyset = A; A \cup I = I.$

Из школьного курса математики известно также, что распределительным свойством обладает сложение и умножение: для любых действительных чисел $a$, $b$ и $c$ справедливо равенство:

$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$

Выясним, обладают ли «похожими» свойствами пересечение и объединение множеств.

Взаимосвязь пересечения и объединения множеств отражается в ***распределительных***, или ***дистрибутивных, свойствах*** этих операций:

**1.** Пересечение дистрибутивно относительно объединения множеств, т. е. для любых множеств $A$, $B$ и $C$ выполняется равенство

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

**2.** Объединение дистрибутивно относительно пересечения множеств, т. е. для любых множеств $A$, $B$ и $C$ выполняется равенство

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

Если провести аналогию с действиями над числами, то можно увидеть, что дистрибутивное свойство пересечения относительно объединения «похоже» на распределительное свойство умножения относительно сложения при условии, что в качестве операции, аналогичной пересечению, рассматривать умножение, а для объединения — сложение. Но для дистрибутивного свойства объединения множеств относительно пересечения аналогичного свойства над числами нет.

Действительно, наличие такого свойства означало бы, что для всех чисел выполняется равенство: $a \cdot b + c = (a + c) \cdot (b + c)$, что невозможно. Подмеченное отличие указывает на то, что наряду с тем, что пересечение и объединение множеств обладают рядом свойств, аналогичных свойствам сложения и умножения чисел, операции над множествами обладают свойствами, которых нет у операций над числами.

Заметим, что если в выражении есть знаки пересечения и объе-динения множеств и нет скобок, то сначала выполняют пересечение, так как считают, что пересечение более «сильная» операция, чем объединение. Поэтому запись дистрибутивного свойства пересечения относительно объединения можно упростить, опустив скобкив правой части равенства.

Отметим, что понятия пересечения и объединения множеств можно обобщить на любое конечное число множеств:

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \text{ и } x \in A_2 \text{ и } \ldots \text{ и } x \in A_n\},$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \text{ или } x \in A_2 \text{ или } \ldots \text{ или } x \in A_n\}.$$

Такое обобщение возможно, поскольку операции пересечения и объединения обладают свойством ассоциативности

***Дополнение к подмножеству. Разность множеств*.**

Пусть $B \subset A$. ***Дополнением*** *к подмножеству B* называется множество всех элементов из множества $A$, не принадлежащих множеству $B$. В данном случае дополнение к подмножеству обозначают так: $B'_A$.На Рис. 10 дается иллюстрация $B'_A$ с помощью диаграмм Эйлера – Венна.

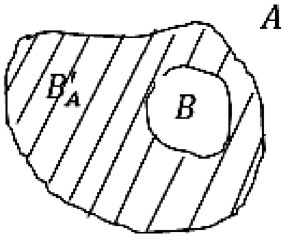



Рис.10

Пусть $B \subset I$, тогда дополнение к множеству $B$ в универсальном множестве $I$ обозначают так: $B'$.

Рассмотрим некоторые свойства для любых подмножеств $A$ и $B$ универсального множества $I$:

1) $(A \cap B)' = A' \cup B'$;
2) $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Пусть даны два множества $A$ и $B$.

***Разностью*** двух множеств $A$ и $B$ называется множество $A \backslash B$, состоящее из всех элементов принадлежащих множеству $A$ и не принадлежащих множеству $B$. Например,пусть$A = \{a; b; c; d; e; f\}$и $B = \{a; m; c; n; e; k\}$, тогда по определению разности двух множеств $A$ и $B$ имеем $A \backslash B = \{b; d; f\}$. Отсюда следует, что $A \backslash B = A \backslash (A \cap B)$, а также $A' = I \backslash A$. Разность двух множеств можно записать и так:

$$A \backslash B = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Наглядно разность двух множеств $A \backslash B$ можно проиллюстрировать с помощью кругов Эйлера – Венна на Рис.11

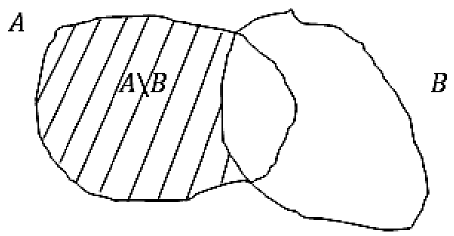



Рис.11

Для любых множеств $A$, $B$ и $C$ выполняются следующие равенства:

а) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$; б) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C) = (A \backslash B) \backslash C$.

в) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$;

г) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

д) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;

***Декартово произведение*** **множеств**

Рассмотрим *пример*. Используя две цифры 3 и 5, можно записать четыре двузначных числа: 35, 53, 33 и 55. Несмотря на то что числа 35 и 53 записаны с помощью одних и тех же цифр, эти числа различные.

В том случае, когда важен порядок следования элементов, в математике говорят об упорядоченных наборах элементов. В рассмотренном примере мы имели дело с **упорядоченными парами**.

Упорядоченную пару, образованную из элементов $a$ и $b$, принято записывать, используя круглые скобки: $(a, b)$. Элемент $a$ называют *первой координатой* (*компонентой*) *пары*, элемент $b$ — *второй координатой* (*компонентой*) *пары*. Пары $(a, b)$ и $(c, d)$ равны в том и только том случае, когда $a = c$ и $b = d$.

В упорядоченной паре $(a, b)$ может быть, что $a = b$. Так, запись чисел 33 и 55 можно рассматривать как упорядоченные пары (3, 3) и (5, 5).

Упорядоченные пары можно образовать из элементов как одного множества, так и двух множеств. Пусть, например, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 5\}$. Образуем упорядоченные пары так, чтобы первая компонента принадлежала множеству $A$, а вторая — множеству $B$. Если мы перечислим все такие пары, то получим множество: $\{(1, 3), (1, 5), (2, 5), (3, 3), (3, 5)\}$.

Видим, что, имея два множества $A$ и $B$, мы получили новое множество, элементами которого являются упорядоченные пары чисел. Это множество называют декартовым произведением множеств $A$ и $B$.

***Декартовым произведением*** множеств $A$ и $B$ называют множество всех пар, первая компонента которых принадлежит множеству $A$, а вторая — множеству $B$.

Декартово произведение множеств $A$ и $B$ обозначают $A$ x $B$. Тогда по определению имеем: $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ и } y \in B\}$.

***Пример.*** «Найти декартово произведение множеств $A$ и $B$, если:

а) $A = \{m, p\}$, $B = \{e, f, k\}$;

б) $A = B = \{3, 5\}$».

*Решение.*

а) Действуем согласно определению — образуем все пары, первая компонента которых выбирается из $A$, а вторая — из $B$:

$A \times B = \{(m, e), (m, f), (m, k), (p, e), (p, f), (p, k)\}$.

б) Декартово произведение равных множеств находят, образуя всевозможные пары из элементов данного множества:

$$A \times A = \{(3, 3), (3, 5), (5, 3), (5, 5)\}.$$

Выясним, какими *свойствами обладает операция* нахождения декартова произведения. Так как декартовы произведения $A \times B$ и $B \times A$ состоят из различных элементов, то декартово умножение множеств $A$ и $B$ свойством коммутативности не обладает. Аналогично рассуждая, можно доказать, что для этой операции не выполняется и свойство ассоциативности.

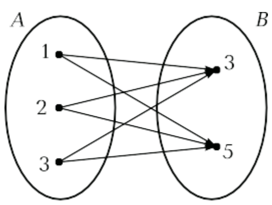
Но она *дистрибутивна относительно объединения и разности множеств*, т. е. для любых множеств $A$, $B$ и $C$ выполняются равенства:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C);$$

$$(A \setminus B) \times C = (A \times B) \setminus (B \times C).$$

Выясним теперь, как можно наглядно представлять декартово произведение множеств.

Если множества $A$ и $B$ конечны и содержат небольшое число элементов, то можно изобразить декартово произведение этих множеств с помощью графа или таблицы. Например, декартово произведение множеств $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{3, 5\}$ представлено на рис. 12, *а* с помощью графа, а на Рис. 12, *б* с помощью таблицы




*а*

| | B | |
|---|---|---|
| A | 3 | 5 |
| 1 | (1, 3) | (1, 5) |
| 2 | (2, 3) | (2, 5) |
| 3 | (3, 3) | (3, 5) |

*б*

Рис. 12

Выясним теперь, как можно наглядно представлять декартово произведение множеств. Декартово произведение двух числовых множеств (конечных и бесконечных) можно изображать на координатной плоскости, так как каждая пара чисел может быть единственным образом изображена точкой на этой плоскости.

Например, декартово произведение $A \times B$ множеств $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{3, 5\}$ на координатной плоскости показано на Рис. 13. Заметим, что элементы множества $A$ мы изобразили на оси $x$, а элементы множества $B$ — на оси $y$.

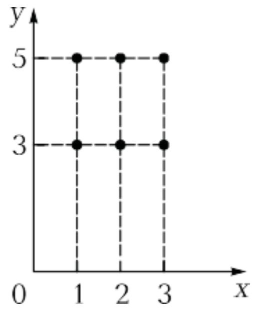



Рис. 13

Такой способ наглядного представления декартова произведения двух числовых множеств удобно использовать в случае, когда хотя бы одно из них бесконечное.

г) Декартово произведение **R x R** состоит из всевозможных действительных чисел. Точки, изображающие эти пары, сплошь заполняют координатную плоскость. Таким образом, декартово произведение **R** x **R** содержит столько же элементов, сколько точек находится на координатной плоскости.

В математике и других науках рассматривают не только упорядоченные пары, но и упорядоченные наборы из трех, четырех и более элементов. Например, запись числа 367 — это упорядоченный набор из трех элементов, а запись слова «математика» — это упорядоченный набор из 10 элементов.

Упорядоченные наборы часто называют ***кортежами*** и различают по длине.

***Длина кортежа*** — это число элементов, из которых он состоит. Например, (3, 6, 7) — это кортеж длины 3, (м, а, т, е, м, а, т, и, к, а) — это кортеж длины 10.

Рассматривают в математике и декартово произведение трех, четырех и вообще $n$ множеств.

***Декартовым произведением*** множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называют множество всех кортежей длины $n$, первая компонента которых принадлежит множеству $A_1$, вторая -множеству $A_2$, …, $n$-я множеству $A_n$.

Декартово произведение множеств $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ обозначают так: $A_1$ x $A_2$ x … x $A_n$.

***Пример. «***Даны множества: $A_1 = \{2, 3\}$, $A_2 = \{3, 4, 5\}$, $A_{3=}$ $\{6, 7$.

Найти $A_1$х$A_2$х$A_3$».

*Решение*.

Элементами множества $A_1$ х $A_2$ х $A_3$ будут кортежи длины 3 такие, что первая их компонента принадлежит множеству $A_1$, вторая — множеству $A_2$, третья — множеству $A_3$:

$A_1$х$A_2$х$A_3$ ={(2, 3, 6), (2, 3, 7), (2, 4, 6), (2, 4, 7), (2, 5, 6),(2, 5, 7),(3, 3, 6), (3, 3, 7), (3, 4, 6), (3, 4, 7), (3, 5, 6), (3, 5, 7)}.

***Разбиение множества на подмножества (классификация)***.

Говорят, что множество *U разбито на подмножества или классы*, если выполняются следующие условия:

1) полученные подмножества попарно не пересекаются;
2) объединение всех подмножеств совпадает с множеством ***U*.**

Разбиение на классы называют также *классификацией.*

Классификацию мы выполняем достаточно часто. Так, натуральные числа представляем как два класса: четные и нечетные. Углы на плоскости разбиваем на три класса: прямые, острые и тупые.

*Любая классификация связана с разбиением некоторого множества объектов на подмножества. При этом считают, что множество X разбито на классы $X_1$, $X_2$, …, $X_n$, …, если*:

- *подмножества $X_1$, $X_2$, …, $X_n$, … попарно не пересекаются*;
- *объединение подмножеств $X_1$, $X_2$, …, $X_n$, … совпадает с множеством X.*

Если не выполнено хотя бы одно из условий, классификацию считают неправильной. Например, если из множества *X* треугольников выделить подмножества равнобедренных, равносторонних и разносторонних треугольников, то разбиения не получится, поскольку подмножества равнобедренных и равносторонних треугольников пересекаются (все равносторонние треугольники являются равнобедренными). В данном случае не выполнено первое условие разбиения множества на классы.

Так как разбиение множества на классы связано с выделением его подмножеств, то классификацию можно выполнять с помощью свойств множества.

Рассмотрим, *например,* множество натуральных чисел **N**. Оно обладает различными свойствами. Положим, что нас интересуют числа, кратные 3. Это свойство позволяет выделить из множества натуральных чисел подмножество, состоящее из чисел, кратных 3. Тогда про остальные натуральные числа можно сказать, что они не кратны 3, т. е. получаем еще одно подмножество множества натуральных чисел (Рис. 14)


Рис. 14

Так как выделенные подмножества не пересекаются, а их объединение совпадает с множеством натуральных чисел, то имеем разбиение этого множества на два класса Вообще, если на множестве $X$ задано одно свойство, то это множество разбивается на два класса: первый — класс объектов, обладающих этим свойством, а второй — дополнение первого класса до множества $X$. Во втором классе содержатся такие объекты множества $X$, которые заданным свойством не обладают.

Рассмотрим теперь *ситуацию,* когда для множества заданы два свойства. Например, такие свойства натуральных чисел, как «быть кратным 3» и «быть кратным 5». С помощью этих свойств из множества **N** натуральных чисел можно выделить два подмножества: $A$ — подмножество чисел, кратных 3, и $B$ — подмножество чисел, кратных 5. Эти множества пересекаются, но ни одно из них не является подмножеством другого (Рис. 15).

Проанализируем получившийся рисунок. Конечно, разбиения множества натуральных чисел на подмножества $A$ и $B$ произошло. Но круг, изображающий множество **N**, можно рассматривать как состоящий из четырех непересекающихся областей — на рисунке они пронумерованы. Каждая область изображает некоторое подмножество множества **N**. Подмножество I состоит из чисел, кратных 3 и 5; подмножество II — из чисел, кратных 3 и не кратных 5; подмножество

III — из чисел, кратных 5 и не кратных 3; подмножество IV — из чисел, не кратных 3 и не кратных 5. Объединение этих четырех подмножеств есть множество **N**. Таким образом, выделение двух свойств привело к разбиению множества **N** натуральных чисел на четыре класса.

Не следует думать, что задание двух свойств элементов множества всегда приводит к разбиению этого множества на четыре класса. Например, с помощью таких двух свойств: «быть кратным 3» и «быть кратным 6» множество натуральных чисел разбивается на три класса (Рис. 16): I — класс чисел, кратных 6; II — класс чисел, кратных 3, но не кратных 6; III — класс чисел, не кратных 3.

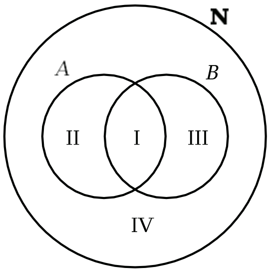



Рис. 15

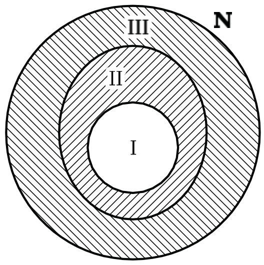



Рис.16

**Решение типовых примеров:**

1»Приведите примеры множеств, составленных из»:

а) чисел,

б)геометрических фигур.

*Решение.*

а) 1; 3; 5; 7; 9 – множество однозначных нечетных чисел;

b) Множество треугольников; множество отрезков; множество точек и т.д.

2. «Даны множества: $M$ – множество натуральных чисел, больше 9 и меньше 20; $P$ – множество натуральных чисел, оканчивающихся цифрой 3».

а) «Укажите, каким из этих множеств принадлежат числа 0; 3; 5; 8; 9; 13; –14; 17; 19; 20. Запишите это с помощью символа $\in$ ".

б) «Укажите, каким из этих множеств не принадлежат названные числа. Запишите это с помощью символа $\notin$ ".

*Решение.*

а)17$\in M$; 19$\in M$; 3$\in P$; 13$\in P$.

б)$0 \notin P; 0 \notin M; 5 \notin P; 5 \notin M; 8 \notin P; 8 \notin M; 9 \notin P; 9 \notin M$

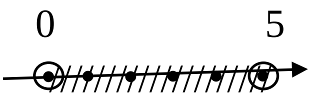
**2.** «

Изобразите на числовой прямой следующие множества»:

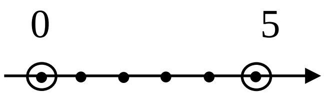
а)$A = \{x | x \in R, 0 < x < 5\}$; б)$B = \{x | x \in Z, 0 < x < 5\}$.

*Решение.*

а)$A = \{x | x \in R, 0 < x < 5\}$;




б)$B = \{x | x \in Z, 0 < x < 5\}$




4. «Сформулируйте характеристическое свойство множества»:

а) параллелограммов;

б) прямоугольных треугольников.

*Решение:*

а) четырехугольники, у которых противоположные стороны параллельны;

б) треугольник, который содержит прямой угол.

5. Рассмотрим два множества $A$ и $B$, причем $A = \{1; 2; 3; 4; 7; 9; 12\}$ и $B = \{2; 3; 7; 9; 14; 15\}$Составим новое множество $C = \{2; 3; 7; 9\}$. Полученное множество $C$ является *пересечением* двух множеств $A$ и $B$. Кругами Эйлера – Венна это можно изобразить так (Рис.17):

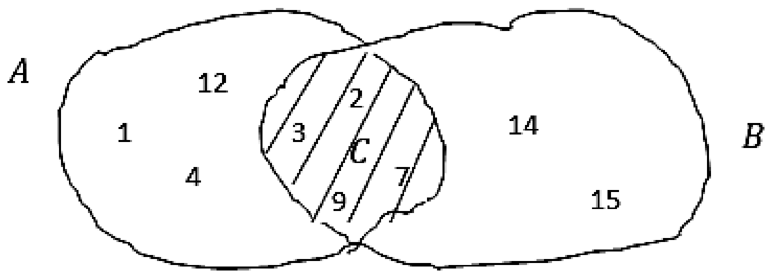



Рис.17

6. Рассмотрим два множества $A$ и $B$, причем $A = \{1; 2; 3; 4; 7; 9; 12\}$ и $B = \{2; 3; 7; 9; 14\}$. Составим новое множество $C = \{1; 2; 3; 4; 7; 9; 12; 14\}$.

Полученное множество является *объединением* двух множеств $A$ и $B$. Кругами Эйлера – Венна это можно изобразить так (Рис.18):

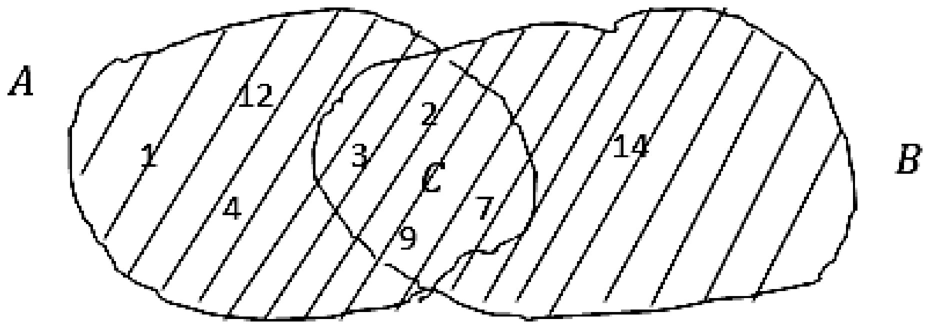



Рис.18

Изобразить на координатной плоскости декартово произведение $A$ х $B$, если:

а) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = [3, 5]$;
б) $A = [1, 3]$, $B = [3, 5]$;
в) $A = R$, $B = [3, 5]$;
г) $A = R$, $B = R$.

*Решение*

а) В этом случае декартовым произведением $A$ х $B$, будет множества пар, первая компонента которых либо 1, либо 2, либо 3, а вторая — любое действительное число из промежутка [3, 5]. Такое множество пар действительных чисел на координатной плоскости изобразится тремя отрезками (Рис. 19).

б) В этом случае бесконечны оба множества $A$ и $B$.

Поэтому первой координатой пары, принадлежащей множеству $A$ $x$ $B$, может быть любое число из промежутка [1, 3], и, следовательно, точки, изображающие элементы декартова произведения данных множеств $A$ и $B$, образуют квадрат (Рис. 20). Чтобы подчеркнуть, что элементы декартова произведения изображаются и точками, лежащими внутри квадрата, этот квадрат можно заштриховать.

в) Этот случай отличается от предыдущего тем, что множество $A$ состоит из всех действительных чисел, т. е. абсцисса точек, изображающих элементы множества $A$ х $B$, принимает все действительные значения, в то время как ордината выбирается из промежутка [3, 5]. Множество таких точек образует полосу (Рис. 21).

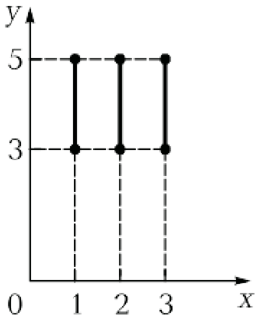



Рис. 19

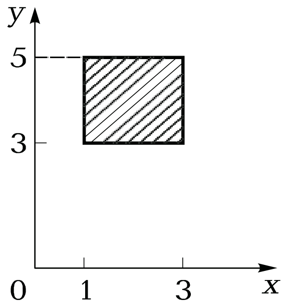



Рис.20

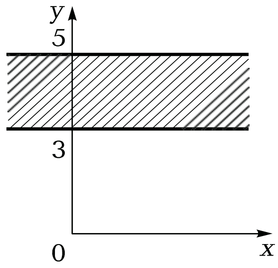



Рис. 21

## Задания для самостоятельного решения

1. Даны два множества: $X = \{2, 4, 6\}$ , $Y = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Верно ли, что:

а) множества $X$ и $Y$ пересекаются;

б) множество $X$ является подмножеством множества $Y$;

в) множество $P = \{4, 0, 6, 8, 2\}$ равно множеству $Y$?

2.Известно, что элемент $a$ содержится в множестве $A$ и в множестве $B$. Следует ли из этого, что:

а) $A = B$; б) $B \subset A$;

в) $A \subset B$?

3.Из множества $K = \{216, 546, 153, 171, 234\}$ выпишите числа, которые:

а) делятся на 3;

в) не делятся на 4;

б) делятся на 9;

г) не делятся на 5.

Есть ли среди полученных подмножеств такое, которое равно множеству $K$?

4.Изобразите с помощью кругов Эйлера отношения между множествами $C$ и $D$, если:

а) $C$ — множество двузначных чисел,

$D = \{3, 43, 34, 56, 103\}$;

б) $C$ — множество двузначных чисел, $D$ — множество четных натуральных чисел;

в) $C$ — множество двузначных чисел, $D$ — множество трех-значных чисел.

5.Отношения между множествами всех выпуклых четырехугольников, параллелограммов, прямоугольников, ромбов и квадратов изображены на Рис.22.

Покажите каждое из множеств, обозначив буквами А, В, С, Д, Е.

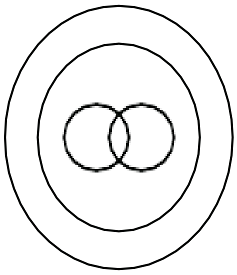


Рис.22

6.Дано множество $P = \{3, 5, 7, 9\}$. Образуйте всевозможные его подмножества. Сколько их должно быть?

7.О каких теоретико-множественных понятиях идет речь в следующих заданиях, выполняемых учащимися начальных классов:

а) Запиши по порядку числа от 10 до 19. Подчеркни и прочитай четные числа;

б) Из ряда чисел от 1 до 20 выпиши по порядку числа, которые делятся на 5;

в) Запиши три числа, которые при делении на 7 дают в остатке 4.

8.Дано уравнение $2x + 3y = 3$. Запишите несколько решений данного уравнения. Что представляет собой каждое решение? Является ли пара
(4, 5) решением данного уравнения? А пара (5, 4)?

9.Перечислите элементы декартова произведения $A$ х $B$, если:

а) $A$ х $\{a, b, c, d\}$, $B = \{b, k, l\}$;

б) $A = B = \{a, b, c\}$;

в) $A = \{a, b, c\}$, $B = A$.

10.Запишите различные двузначные числа, используя цифры 3, 4 и 5. Сколько среди них таких, запись которых начинается с цифры 3? Как связано решение данной задачи с понятием декартова произведения множеств?

11.Даны два множества: $A = \{1, 3, 5\}$ и $B = \{2, 4\}$.

1)Найдите пересечение, объединение, разность этих множеств.

2)Перечислите элементы множеств $A$ х $B$ и $B$ х $A$. Верно ли, что:
а) множества $A$ х $B$ и $B$ х $A$ содержат одинаковое число эле- ментов;
б) множества $A = B$ и $B = A$ равны?

12.Из множества $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ выделили подмножества $X_1$, $X_2$ и $X_3$. В каком из следующих случаев множество $X$ оказалось разбитым на классы:

а) $X_1 = \{1, 3, 5, 7, 11\}$, $X_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $X_3 = \{9\}$;

б) $X_1 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $X_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $X_3 = \{10, 11, 12\}$;

в) $X_1 = \{3, 6, 9, 12\}$, $X_2= \{1, 5, 7, 11\}$, $X_3= \{2, 10\}$?

13.Из множества $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ выделили подмножества:

а) $A$ — четных чисел; $B$ — нечетных чисел;

б) $A$ — чисел, кратных 2; $B$ — чисел, кратных 3; $C$ — чисел, кратных 4;

в) $A$ — нечетных однозначных чисел; $B$ — четных двузначных чисел.

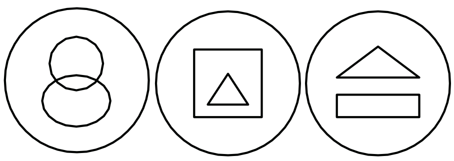
В каком случае произошло разбиение множества $X$ на классы?

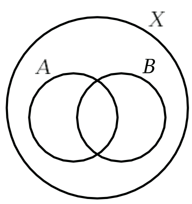
14.Из множества треугольников выделили подмножества треугольников:

а) прямоугольные, равнобедренные, равносторонние; б) остроугольные, тупоугольные, прямоугольные;

в) равносторонние, прямоугольные, тупоугольные.

В каком случае произошло разбиение множества треугольников на классы?






*а* *б* *в*

Рис.23 Рис.24

15.Перечертите фигуры, приведенные на рис. 23, *а—в,* и на каждой из них выделите (различными видами штриховки) непересекающиеся области.

16.Изобразите с помощью кругов Эйлера множество **N** натуральных чисел и его подмножества: четных чисел и чисел, кратных 7. Можно ли утверждать, что множество **N** разбито:

а) на два класса: четных чисел и чисел, кратных 7;

б) на четыре класса: четных чисел, кратных 7; четных чисел, не кратных 7; нечетных чисел, кратных 7; нечетных чисел, не кратных 7?

17.На рис.24 изображены множества: $X$- студентов группы, $A$-спортсменов этой группы, $B$ - отличников этой группы.

а) Укажите классы разбиения множества $X$, полученные с по- мощью свойств «быть спортсменом» и «быть отличником», и охарактеризуйте каждый из них.

б) Сколько получилось бы классов разбиения, если бы ни один отличник группы не был спортсменом?

Выполните соответствующий рисунок и назовите классы разбиения.

**Вопросы теории:**

1.Что такое множество, элемент множества, как обозначают множества?

2.Что называют объединением множеств, пересечением множеств?

3.Что называют разностью множеств, дополнением множества?

4.Какое множество называют универсальным?

5. Перечислите свойства операций над множествами.

6. Декартово произведение множеств.

. 7.Что называют классификацией множества?

**Литература:**

1. Аматова Г.М., Аматов М.А.: Математика. Упражнения и задачи. – М.: Академия 2008.-С.5-18.

2. Стойлова Л.П. Математика. – М.: Академия. 2013. - 463 с .

3. Аматова Г.М., Аматов М.А.: Математика. – М.: Академия.2013. - 463 с

## Тема 4. Бинарные соответствия. Равномощные множества. Отношения на множестве. Свойства.

1. Бинарные соответствия. Равномощные множества.
2. Отношения на множестве. Свойства.

### 4.1 Бинарные соответствия. Равномощные множества.

**Определение**. Пусть *X* и *Y* — два непустых множества. Тройку множеств (X, Y, P), где $P \subset X$ x У, называют *бинарным соответствием P* между элементами этих множеств. При этом *X* называют *областью отправления, Y — областью прибытия,* а *P— графиком* бинарного соответствия.

Если пара $(x, y) \in P$, то говорят, что элемент *x* соответствует элемент *y* и записывают $x\,p\,y$. Здесь *y* — *образ* элемента $x$, а *x* — *прообраз* элемента *y*.

Множество *D* всех элементов из *X*, имеющих хотя бы один образ в *Y*, называют *областью определения* бинарного соответствия.

Множество *E* всех элементов из *Y*, имеющих хотя бы один прообраз в *X*, называют *областью значений* бинарного соответствия.

Если $P = X$ x *Y*, то бинарное соответствие *P* называют *полным*, если же $P = 0$, то соответствие *P* называют *пустым.*

Соответствие $\overline{p}$ называют *противоположным* для *p*, если его график $\overline{P}$ дополняет *P* до декартова произведения *X* x У.

Соответствие $p^{-1}$ называют *обратным* для р, если $yp^{-1}x \Leftrightarrow x\,p\,y$.

Соответствие, при котором каждому элементу множества *X* отвечает не более одного элемента множества *Y*, называют *функциональным.* Соответствия между элементами конечных множеств удобно изображать при помощи *графа или перечислением пар.*

Бинарное соответствие, при котором каждому элементу множества *X* соответствует точно один элемент множества У, называют ***отображением***.

Таким образом, отображение множества *X* в множество У является всюду определенной **функцией, т. е. функцией**, область определения *D* которой совпадает с областью отправления *X*.

Граф *отображения* представлен на рисунке 25, *а*, т.к. из каждой точки множества *X* выходит точно одна стрелка. На рисунке 25, *б* представлен граф соответствия, которое является ***функциональным*** соответствием, но не является *отображением*( не из каждой точки множества выходит стрелка).

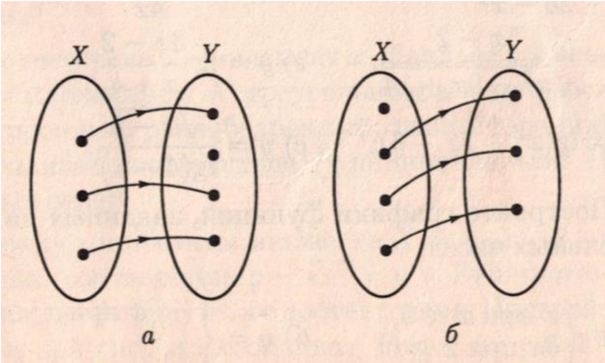



Рис.25

Выделяют некоторые специальные виды отображений.

**Определение**. Если каждый элемент множества У имеет не более одного прообраза в *X*, то отображение называют отображением *«в»* (Рис.26, а). Если каждый элемент множества У имеет не менее одного прообраза в *X*, то отображение называют или отображением *«на»* (Рис. 26, *б)*.

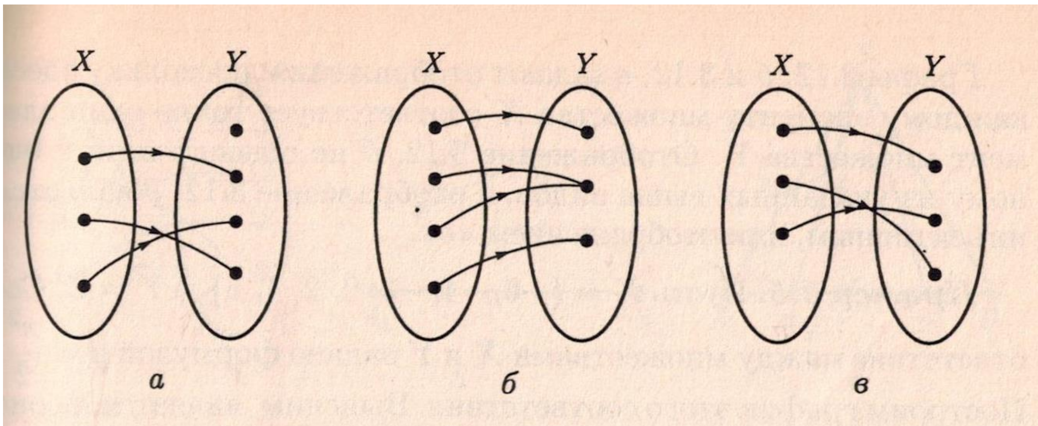



Рис.26

**Определение**. Если *каждому элементу множества X соответствует единственный элемент множества У и каждый элемент множества У соответствует только одному элементу множества X, то такое соответствие называют* ***взаимно-однозначным.*** (Рис.26, в).

Множества *X* и У называют ***равномощными,*** если между элементами этих множеств можно установить взаимно-однозначное соответствие. Если множества *X* и *Y* равномощны, то пишут *X* = *Y*.

Нетрудно видеть, что множества, которые рассмотрены в *примерах* 1 и 2, равномощны.

Рассмотрим примеры.

1.Пусть $X$ — множество кружков, $Y$ — множество квадратов и соответствие между ними задано с помощью стрелок (Рис.27).

Это соответствие взаимно-однозначное, так как каждому кружку из множества $X$ сопоставляется единственный квадрат из множества $Y$ и каждый квадрат из множества $Y$ соответствует только одному кружку из множества $X$.

2.Пусть $X$ — множество действительных чисел, $Y$ —множество точек координатной прямой. Соответствие между ними таково: действительному числу сопоставляется точка координатной прямой. Это соответствие взаимно-однозначное, так как каждому действительному числу сопоставляется единственная точка координатной прямой и каждая точка на прямой соответствует только одному числу.

Равномощными могут быть как конечные, так и бесконечные множества. Равномощные конечные множества называют еще ***равночисленными***.

В начальном обучении математике равночисленность выражается словами ***«столько же»*** и может использоваться при ознакомлении учащихся со многими другими понятиями. Например, чтобы ввести равенство чисел, сравнивают два множества, устанавливая между ними взаимно-однозначное соответствие. Например, пишут, что
5 = 5, так как кружков столько же, сколько квадратов ( Рис.27).

Понятие равночисленности множеств лежит и в основе определения отношений *«больше на ...» и «меньше на ...».*

Например, чтобы утверждать, что 6 больше 4 на 2, сравнивают два множества, устанавливая взаимно-однозначное соответствие между множеством $X$, в котором 4 элемента, и подмножеством $Y_1$ другого множества $Y$, в котором 6 элементов (Рис.28), и делают вывод: треугольников столько же, сколько кружков, и еще 2. Другими словами, треугольников на 2 больше, чем кружков.

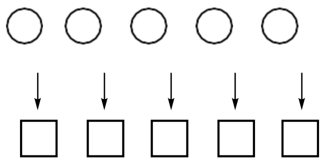


Рис.27

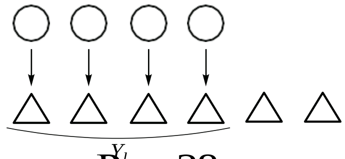


Рис.28

Как уже было указано, равномощными могут быть и бесконечные множества. В математике доказано, что для бесконечного множества $A$ всегда найдется такое его подмножество $B$, что между $A$ и $B$ можно установить взаимно-однозначное соответствие. Иногда это утверждение считают определением бесконечного множества.

Если бесконечное множество равномощно множеству **N** натуральных чисел, то его называют ***счетным***. Любое бесконечное подмножество множества **N** счетно: чтобы пронумеровать его элементы, надо расположить элементы подмножества в порядке возрастания и нумеровать один за другим.

Так, счетно множество всех нечетных натуральных чисел, множество натуральных чисел, кратных 5, и др. Счетными являются также множества всех целых чисел, всех рациональных чисел.

Существуют ли множества, отличные от счетных? Доказано, что бесконечным множеством, не равномощным множеству **N** натуральных чисел, является множество **R** всех действительных чисел.

### 4.2 Отношения на множестве. Свойства.

Чтобы определить общее понятие бинарного отношения на множестве рассмотрим сначала конкретный пример. Пусть на множестве$X$ = {2, 4, 6, 8} задано отношение «меньше». Это означает, что для любых двух чисел из множества $X$ можно сказать, какое из них меньше: $2 < 4$, $2 < 6$, $2 < 8$, $4 < 6$, $4 < 8$, $6 < 8$. Полученные неравенства можно записать иначе, в виде упорядоченных пар: (2, 4), (2, 6),(2, 8), (4, 6), (4, 8), (6, 8). Но все эти пары есть элементы декартова произведения $X$ x $X$, поэтому об отношении «меньше», заданном на множестве $X$, можно сказать, что оно является подмножеством множества $X \times X$.

***Бинарным отношением*** на множестве $X$ называют всякое подмножество декартова произведения $X \times X$.

Отношения на множестве будем обозначать буквами $R$, $S$, $T$, $P$ и др.

Если $R$ - отношение на множестве $X$, то, согласно определению, $R \subset X \times X$. С другой стороны, если задано некоторое подмножество множества $X$ □ $X$, то оно определяет на множестве $X$ некоторое отношение $R$.

Утверждение о том, что элементы $x$ и $y$ находятся в отношении $R$, можно записывать так: $(x, y) \in R$ или $xRy$. Последняя запись читается: «Элемент $x$ находится в отношении $R$ с элементом $y$».

Отношения задают так же, как соответствия. Отношение можно задать, перечислив пары элементов множества $X$, находящихся в этом отношении. Формы представления таких пар могут быть различными — они аналогичны формам задания соответствий. Отличия касаются задания отношений с помощью графа.

Построим, например, граф отношения «меньше», заданного на множестве $X = \{2, 4, 6, 8\}$. Для этого элементы множества $X$ изобразим точками (их называют вершинами графа), а отношение «меньше» между ними — стрелками (Рис.29).

На том же множестве $X$ можно рассмотреть другое отношение — «кратно». Граф этого отношения будет в каждой вершине иметь петлю (стрелку, начало и конец которой совпадают), так как каждое число кратно самому себе (Рис.30).

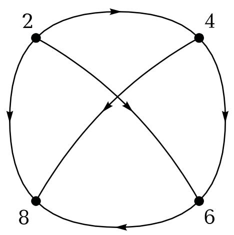



Рис.29

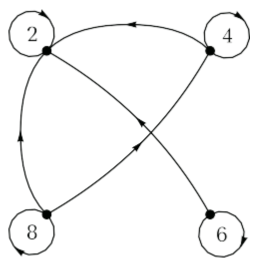



Рис.30

Отношение можно задать с помощью предложения с двумя пере мен ными. Так, например, заданы рассмотренные отношения «меньше» и «кратно», причем использована краткая форма предложений «число $x$ меньше числа $y$» и «число $x$ кратно числу $y$». Некоторые такие предложения можно записывать с помощью символов. Например, отношения «меньше» и «кратно» можно задать в таком виде: «$x < y$», «$x \vdots y$»; отношение «$x$ больше $y$ на 3» — в виде равенства $x = y + 3$ (или $x - y = 3$).

Для отношения $R$, заданного на множестве $X$, всегда можно задать отношение $R^{-1}$, ему обратное, — оно определяется так же, как соответствие, обратное данному. Например, если $R$ — отношение «$x$ меньше $y$», то обратным ему будет отношение «$y$ больше $x$».

Понятием отношения, обратного данному, часто пользуются при начальном обучении математике. Например, чтобы предупредить ошибку в выборе действия, с помощью которого решается задача: «У Пети 7 карандашей, что *на 2 меньше*, чем у Бори. Сколько карандашей у Бори?» — ее переформулируют: «У Пети 7 карандашей, а у Бори *на 2 больше*. Сколько карандашей у Бори?». Видим, что переформулировка свелась к замене отношения «меньше на 2» обратным ему отношением «больше на 2».

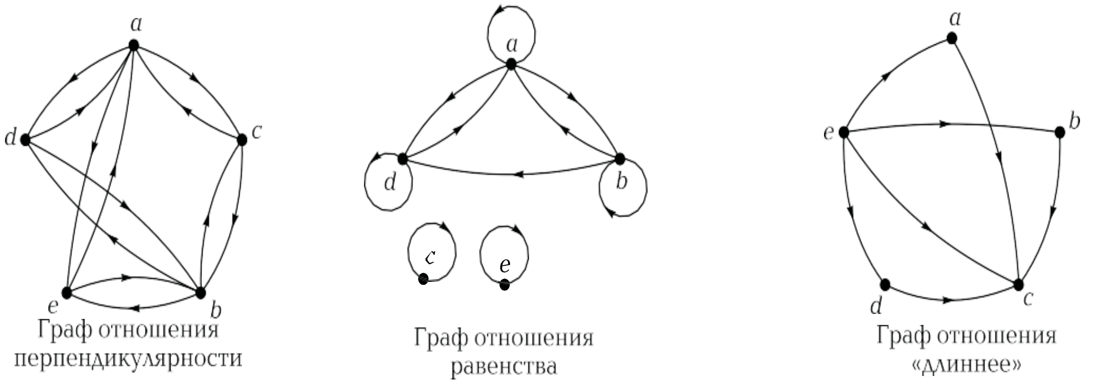
**Свойства отношений на множестве**

Если каждый элемент множества $X$ находится в отношении $R$ с самим собой, то такое отношение называют *рефлексивным*; если же ни один элемент множества $X$ не находится в отношении $R$ с самим собой, то такое отношение называют *антирефлексивным.*

Примеры рефлексивных отношений:

1) отношение «кратно» на множестве натуральных чисел (каждое натуральное число кратно самому себе);

2)отношение равенства треугольников на множестве треугольников {а, б, с, д, е},обладает свойством рефлексивности, так как каждый треугольник равен самому себе(вокруг каждой точки имеется петля).Рис.31,б.




а б в

Рис.31

Существуют отношения, которые свойством рефлексивности на обладают. Таким, например, является отношение перпендикулярности на множестве отрезков: нет ни одного отрезка, о котором можно сказать, что он перпендикулярен самому себе. Поэтому на графе отношения перпендикулярности (Рис.31,а) нет ни одной петли. Не обладает свойством рефлексивности и отношение «длиннее» для отрезков. (Рис.31,в).Но эти отношения обладают следующими свойствами:

- если один отрезок перпендикулярен другому отрезку, то этот «другой» отрезок перпендикулярен первому;
- если один отрезок равен другому отрезку, то этот «другой» равен первому.

В этом случае говорят, что это отношение обладают свойством *симметричности.*

Отношение $R$ на множестве $X$ называют ***симметричным***, если выполняется условие: из того, что элемент $x$ находится в отношении $R$ с элементом $y$, следует, что и элемент $y$ находится в отношении $R$ с элементом $x$. Используя символы, это определение можно записать в таком виде:

$(\forall\ x, y \in X)$, $R$ симметрично на $X \Leftrightarrow (xRy \Rightarrow yRx)$
опр

Граф симметричного отношения обладает особенностью: вместе с каждой стрелкой, идущей от $x$ к $y$, граф содержит и стрелку, идущую от $y$ к $x$. Справедливо и обратное утверждение. Граф, содержащий вместе с каждой стрелкой, идущей от $x$ к $y$, и стрелку, идущую от $y$ к $x$, является графом симметричного отношения.

В дополнение к рассмотренным двум примерам симметричных отношений присоединим еще такие:

3)отношение параллельности на множестве прямых (если прямая $x$ параллельна прямой $y$, то и прямая $y$ параллельна прямой $x$);

4)отношение равенства треугольников (если треугольник $F$ равен треугольнику $P$, то треугольник $P$ равен треугольнику $F$ ).

Существуют отношения, которые свойством симметричности не обладают. Таким, например, является отношение «длиннее» на множестве отрезков. Действительно, если отрезок $x$ длиннее отрезка $y$, то отрезок $y$ не может быть длиннее отрезка $x$. Про отношение «длиннее» говорят, что оно обладает свойством антисимметричности, или просто антисимметрично.

Отношение *R* на множестве *X* называют ***антисимметричным***, если для различных элементов *x* и *y* из множества *X* выполнено условие: из того, что *x* находится в отношении *R* с элементом *y*, следует, что элемент *y* в отношении *R* с элементом *x* не находится. Используя символы, это определение можно записать в таком виде. Граф антисимметричного отношения обладает особенностью: если две вершины графа соединены стрелкой, то эта стрелка только одна. Справедливо и обратное утверждение: граф, вершины которого соединены только одной стрелкой, есть граф антисимметричного отношения.

Кроме отношения «длиннее» на множестве отрезков свойством антисимметричности, например, обладают:

- отношение «больше» для чисел (если *x* больше *y*, то *y* не может быть больше *x*);
- отношение «больше на 2» для чисел (если *x* больше *y* на 2, то *y* не может быть больше на 2 числа *x*).

Если на множестве X задано отношение *R* и для любых трех элементов *x, y* и *z* из множества *X* выполняется условие: из того что элемент x находится в отношении *R* с элементом y и y находится в отношении *R* с элементом z следует,что элемент x находится в отношении *R* с элементом z, то отношение *R* называют ***транзитивным.*** Символично это записывают так: $X\ R\ Y \wedge Y\ R\ Z \ => \ X\ R\ Z$.

Примерами транзитивного ношения являются:

1)отношение параллельности на множестве прямых (если прямая *x* параллельна прямой *y*, а прямая у параллельна прямой $z$, то и прямая *x* параллельна прямой $z$);

2)отношение равенства треугольников (если треугольник *F* равен треугольнику *P*, а треугольник *P* равен треугольнику *Д*, то треугольник *F* равен треугольнику *Д*).

Если же $XRY \wedge YR\ Z \not\Rightarrow X\ R\ Z$, то отношение *R* ***-антитранзитивно.*** При выполнении условия $x{=}y => x\ R\ y \vee y\ R\ x$ отношение р называют *связным.*

Бинарное отношение $R$ на множестве $X$ называют отношением ***эквивалентности,*** если оно **рефлексивно, симметрично и транзитивно**.

Примерами эквивалентности отношений являются: отношение параллельности на множестве прямых, отношение равенства треугольников на множестве треугольников, отношение равно на множестве натуральных чисел.

Если $R$ асимметрично и транзитивно, то его называют отношением *строгого порядка;* если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, то отношением *нестрогого порядка.*

Множество, на котором задано отношение порядка (строгого или нестрогого), называют *частично упорядоченным.* Если при этом выполняется свойство связности, то множество называют *линейно* (или совершенно) *упорядоченным*.

Примерами отношения порядка являются: а) отношение «x меньше y» на множестве натуральных чисел, б) отношение: «быть выше» на множестве людей, в)отношение:«быть однокурсником» на множестве студентов 3 курса факультета начальных классов.

**Решение типовых примеров**

1. Между элементами множеств $X = \{3,5,7\}$ и $Y = \{2,4,6\}$ задано соответствие $p$ — «$x$ меньше $y$». Зададим соответствие, противоположное данному. Построим и сравним графы этих соответствий.

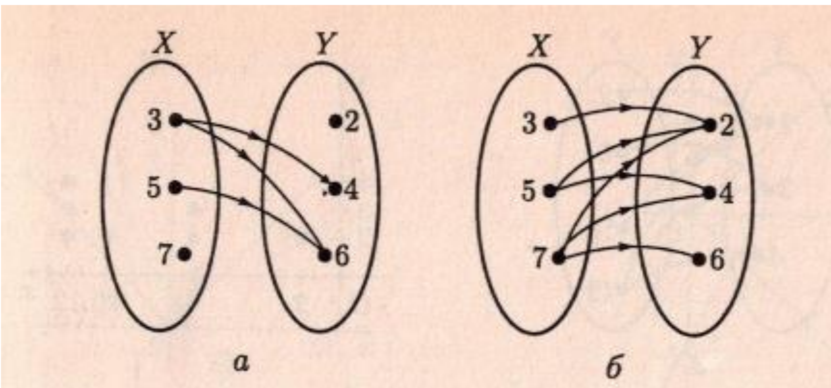



Рис.32

*Решение.*

Построим граф соответствия $p$ – «$x$ меньше $y$» (Рис.32,*а*).

Противоположным $p$ будет соответствие $\overline{p}$, граф которого представлен на (рис.32,*б).* Здесь стрелками соединяются те и только те элементы, которые не находятся в соответствии. Полученный на рис.32 *б* граф задает соответствие *р*— «*х* не меньше *у*». Очевидно, что графы соответствий *р* и *р* дополняют друг друга до графа декартова произведения *X* х *Y*.

2. Между элементами числовых множеств $X = \{2,3,4\}$ и $Y = \{2,6,10,12\}$ задано соответствие *р* — «*х* делит *у*». Построим граф и график этого соответствия. Построим граф и график соответствия, обратного данному.

*Решение.*

Соответствие «х делит *у»* связывает пары чисел множества

$P = \{(2, 2), (2, 6), (2,10), (2,12), (3,6), (3,12), (4,12)\}$.

Поэтому граф и график отношения р будут такими, как показано на рис.33, *а, б.*

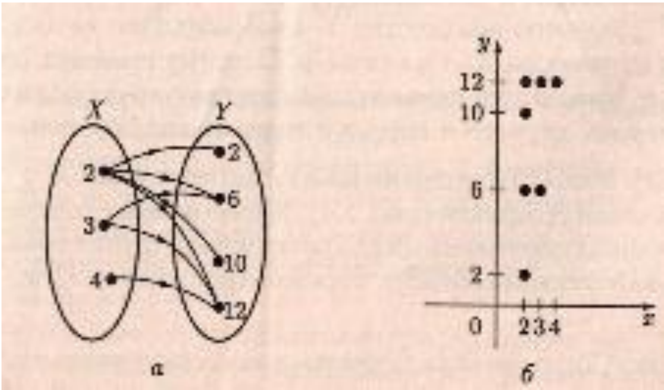



Рис.33

3. Соответствия между множествами *X* и *Y* заданы при помощи графиков (рис.34). Какие из этих соответствий являются функциональными? Для каждого функционального соответствия укажем область определения и множество значений.

*Решение.* Согласно определению, для функционального соответствия необходимо выполнение условия: «Каждому элементу множества *X* соответствует не более одного элемента множества У». Поэтому соответствия, представленные графиками 34 (*б, в, д),* не являются функциональными.

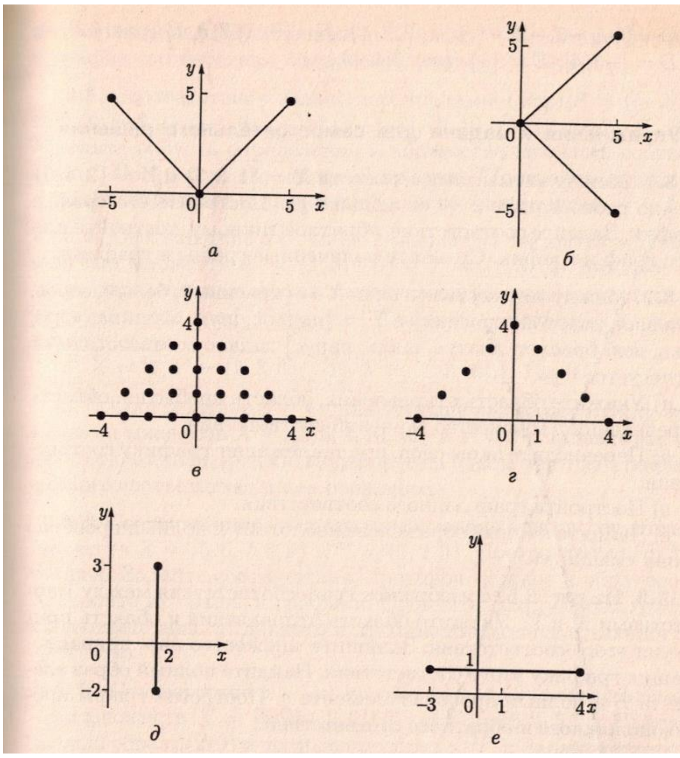


Рис.34

Действительно, при соответствии 34, *б* элемент $x = 5$ имеет два образа $y_1 = -5$ и $y_2 = 5$. При соответствии 34, *в* элемент х = 0 имеет пять образов: $y_1 = 0$; $y_2 = 1$; $y_3 = 2$; $y_4 = 3$; $y_5 = 4$.

При соответствии 34, *д* для элемента $x = 2$ образом является любое число $y \in [-2; 3]$.

Соответствия, представленные графиками на рис.34, *а, г, е,* очевидно, являются функциональными. Укажем область определения *D* и множество значений *E* для каждого из них:

$D = [-5; 5]$; $E = [0; 5]$ (рис. 34, *а);*

D = {- 4, -3,-2,-1,0, 1, 2,3,4); E={0, 1, 2,3,4} (рис.34, *г*);

$D = [-3;4]$; $E = \{1\}$ (рис. 34, *е*).

4. Между множеством $X = \{a, b, c, d\}$ и множеством У = {1, 3, 5, 7, 9} установлены различные соответствия, графы которых представлены на рис.35. Какие из этих соответствий являются отображениями? Относятся ли отображения к какому-либо из вышеуказанных видов?

*Решение.*

Соответствие, заданное графом 35, а, не является отображением, так как элементу, $a \in X$ соответствует не один элемент множества У, а сразу два 1 и 3.

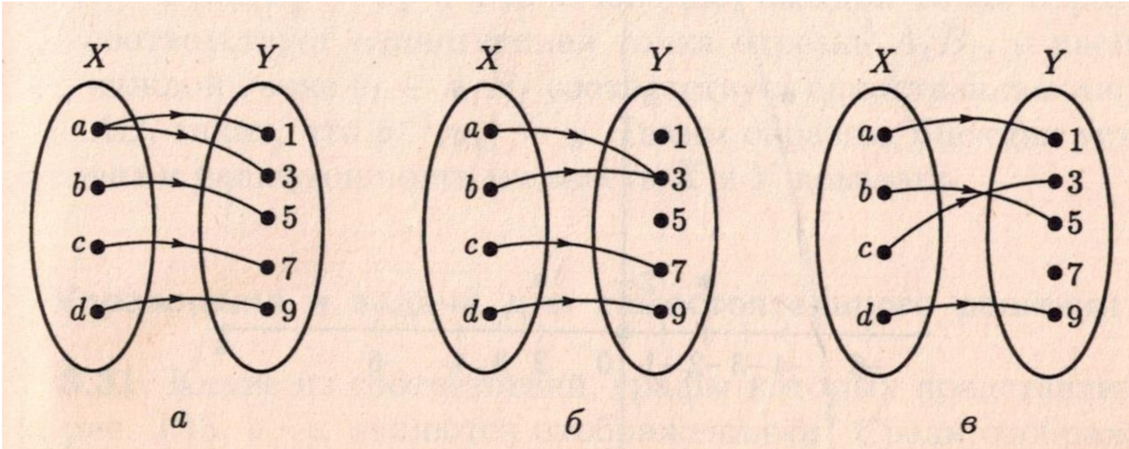



Рис.35

Графы 35, *б* и 35, *в* задают отображения, поскольку здесь, каждому элементу множества *X* соответствует точно один элемент множества *Y*.

5.Пусть Х = {-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6}, а У = Z. Соответствие между множествами *X* и *Y* задано формулой $y = \frac{x^2}{2}$ . Выпишем все пары, принадлежащие графику этого соответствия. Выясним, является ли оно отображением.

*Решение.*

Выпишем пары, принадлежащие графику данного соответствия.

*P* = {(-6,18), (-4,8), (-2,2), (0,0), (2,2), (4,8), (6,18)}.

Очевидно, что каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$. Это означает, что данное соответствие является *отображением*. Рассматриваемое отображение не относится ни к одному из вышеуказанных видов.

6.На множестве $X = \{2,4,6,8,10,12\}$ задано бинарное отношение *р* — «*х* кратно *у*». Построим граф и график этого отношения. Выясним, какими свойствами оно обладает.

Сначала выпишем все пары чисел, принадлежащих графику данного отношения. Получим множество $P \in X^2$. *P* = {(2,2), (4,2), (4,4), (6,2), (6,6), (8,2), (8,4), (8,8),(10,2),(10,10), (12,2), (12,4), (12, 6), (12,12)}.

Теперь построим граф и график (Рис. 36, *а, б)*.

Пользуясь графом, сформулируем свойства данного отношения.

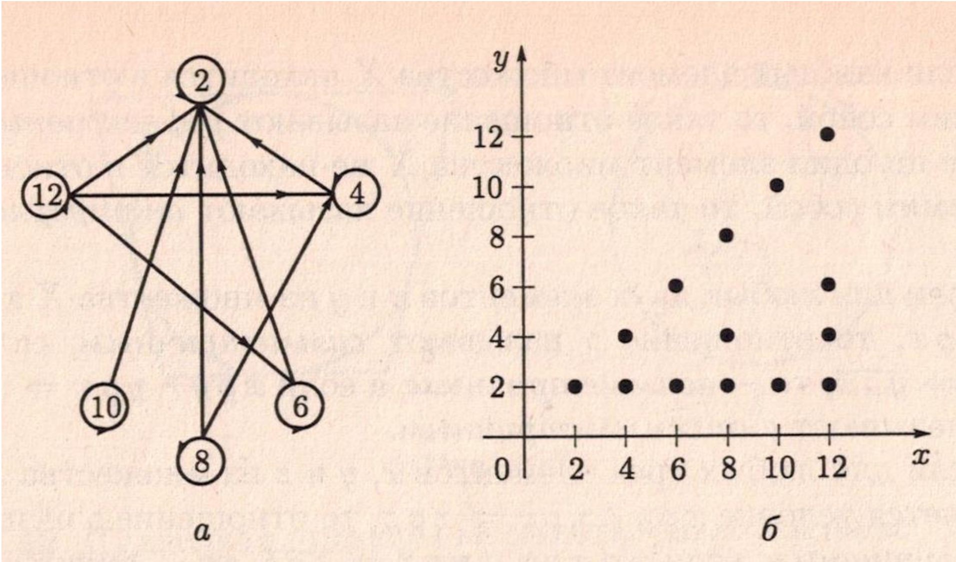



Рис.36

1)Отношение *р рефлексивно*, так как любое число из множества *X* кратно самому себе. Особенностью графа является петля в каждой вершине, а графику принадлежат точки, лежащие на биссектрисе 1-го и 3-го координатных углов.

2)Отношение *р антисимметрично*, так как *x* кратно у и у кратно *x* только в том случае, когда $x = y$. Граф отличается тем, что любые две вершины связаны не более чем одной стрелкой, а график отношения расположен по одну сторону от биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов.

3)Отношение *р транзитивно*: если ***x*** кратно **у** и **у** кратно ***z*,** то ***x*** кратно ***z*,** а граф вместе со стрелками от ***x*** к ***y*** и от ***y*** к ***z*** имеет стрелку *от **x** к **z**.*

Таким образом, отношение ***p*** является отношением *нестрогого порядка*, а поскольку оно не обладает свойством связности, то упорядочивает множество *X* лишь частично.

7.Даны множества: $A=\{1,5,6,7,9\}$;$B=\{2,6,7,8,10\}$.Установите соответствие так, чтобы каждому числу из множества *A* соответствовало единственное большее число из множества *B*.

*Решение.*

Выберем соответствие так Р: «x< у на 2»,где x $\in$A, y$\in$B,тогда *P*={(1,2),(5,6),(6,7),(7,8),(9,10) }.

8.На множестве $Z_0$ целых неотрицательных чисел задано отношение «иметь один и тот же остаток при делении на 5». Докажите, что данное отношение является отношением эквивалентности. Запишите классы, на которые множество $Z_0$ разбирается этим отношением.

Доказательство:

Пусть $n \in Z_0$, тогда при делении на 5 этого числа могут быть остатки: 0;1;2;3;4 в общем виде: все множество Z0 разобьется на классы:

A1={n/n ∈ Ƶ0 ∧ $\overline{n \vdots 5}$ , n=5к; где к=0;1;2… }

A2={n/n ∈ Ƶ0 ∧ $\overline{n \vdots 5}$ , n=5к+1; где к=0;1… }

A3={n/n ∈ Ƶ0 ∧ $\overline{n \vdots 5}$ , n=5к+2; где к=0;1;2… }

A4={n/n ∈ Ƶ0 ∧ $\overline{n \vdots 5}$ , n=5к+3; где к=0;1;2… }

A5={n/n ∈ Ƶ0 ∧ $\overline{n \vdots 5}$ , n=5к+4; где к=0;1;2… }

Тогда любой представитель а этих классов A1; A2; A3; A4; A5 удовлетворяет условию:

1) при делении на 5 он имеет один и тот же остаток, что и *a*.

2) если *a* имеет тот же остаток, что *b*, то и *b*, имеет тот же остаток, что и *a*.

3) если *a* имеет тот же остаток, что *b*, то и *b*, имеет тот же остаток, что и *c*, то *a* имеет тот же остаток, что и *c*.

*Данное отношение обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, поэтому является отношением эквивалентности.* Что и требовалось доказать.

**Задания для самостоятельного решения.**

1.Задайте с помощью графа три соответствия между множествами $X = \{a, b, c\}$ и $Y = \{2, 4, 6\}$ так, чтобы одно из них было взаимно-однозначным.

2.Даны множества: $X = \{2, 5\}$, $Y = \{3, 6\}$. Перечислите элементы декартова произведения данных множеств и образуйте все подмножества полученного множества. Какое из под- множеств задает соответствие: а) «больше»; б) «меньше»; в) «меньше на 1»; г) «меньше в 3 раза»?

3.Соответствие «число *x* в два раза больше числа *y*» рассматривается между множествами *X* и *Y*. Каким будет его график, если: а) $X = \{2, 4, 6, 8\}$,

$Y$ = **N**; б) $X$ = [2, 8], $Y$ = **R**; в) $X$ = $Y$ = **R**

4.Даны множества: $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{3, 7\}$. Найдите $A$ x $B$ и $B$ x $A$. Верно ли, что найденные множества равномощны?

5.На множестве $B = \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ задано отношение Р: «*x делится на y*». Задайте данное отношение всеми возможными способами. Выясните, какими свойствами обладает, а какими не обладает данное отношение. Является ли оно отношением порядка или отношением эквивалентности.

6.Покажите, что выполняя следующие задания, учащиеся начальных классов используют понятие равночисленных множеств:

а) нарисуйте на второй фигуре (Рис. 37) столько же точек, сколько на первой (точки не пересчитывать);

б) нарисуйте, не считая, столько же квадратов и столько же отрезков, сколько на рис. 38 треугольников;

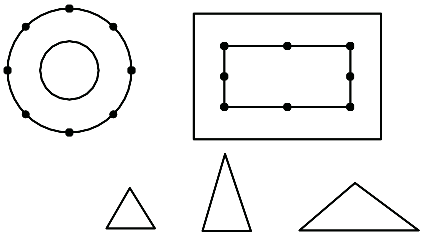


Рис. 37

Рис. 38

в) у Димы было 28 марок, а у Коли на 7 марок больше. Сколько марок было у Коли?;

г) у Маши 9 игрушек, а у Риты на 2 меньше. Сколько игрушек у Риты?;

д) для детского сада купили 4 зеленых мяча, а красных в 3 раза больше, чем зеленых. Сколько красных мячей купили детям?;

е) для детского сада купили 15 красных мячей, а зеленых в 3 раза меньше. Сколько зеленых мячей купили детям?

**Вопросы теории.**

1. Что называют соответствием между множествами?

2. Способы задания соответствия между множествами.

3. Что называют областью определения, областью прибытия, графиком соответствия?

4. Какое соответствие называют обратным данному, противоположным данному?

5. Какое соответствие называется взаимно-однозначным? (пример)

6. Какое соответствие называется отображением; отображением «в», отображением «на»?

7. Когда множества называют равномощными? (пример)

8.Что называется бинарным отношением между элементами на множестве?

9.Перечислите свойства отношений на множестве.

10.Какое отношение называется отношением эквивалентности, строго порядка, нестрогого порядка?

**Литература:**

1.Аматова Г.М., Аматов М.А.: Математика. – М.: Академия 2008.

2.Аматова Г.М., Аматов М.А.: Математика. Упражнения и задачи. – М.: Академия 2008.- С.64- 80.

3.Стойлова Л.П. Математика. – М.: Академия. 1999. 2013. - 463 с

## Тема 5. Предикаты и логические операции над ними. Теорема и виды теорем.

1.Предикаты. Операции над предикатами
2.Теорема и виды теорем.

### 5.1 Предикаты. Операции над предикатами.

*Определение*. Предложение, содержащее предметные переменные (хотя бы одну) и обращающееся в высказывание при замене переменных их значениями, называют *высказывательной формой* или *предикатом.*

В зависимости от числа переменных различают *одноместные* предикаты $P(x)$, $Q\{x)$,..., а также *двухместные* $P(x,y)$, $Q\{x,y)$, ..., *трехместные* и т. д.

Множество значений $U$, которые может принимать предметная переменная $x$, называют *областью определения* предиката $P(x)$.

Подмножество области определения, на котором предикат $P(x)$ обращается в истинное высказывание, называют *множеством истинности* этого предиката и обозначают $Tp$.

Дополнением к области истинности является область ложности предиката $\overline{Tp}$, так что $U = Tp \cup \overline{Tp}$.

Над предикатами выполняются те же логические операции, что и над высказываниями.

***Отрицанием*** предиката P(x) называют предикат $\overline{P(x)}$, определенный на том же множестве и обращающийся в истинное высказывание при тех и только тех значениях $x$, при которых $P(x)$ обращается в ложное высказывание, т. е.

$$T_{\overline{P}} = \overline{T_P}.$$

Пусть предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ определены на множестве $U$.

***Конъюнкцией*** предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называют предикат $P(x) \wedge Q(x)$, определенный на том же множестве и обращающийся в истинное высказывание при тех и только тех $x$, при которых оба предиката обращаются в истинные высказывания:

$$T_{P\wedge Q} = T_P \cap T_Q.$$

***Дизъюнкцией*** предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называют предикат $P(x) \vee Q(x)$, определенный на том же множестве и обращающийся в истинное высказывание при тех и только тех x. при которых хотя бы один из этих предикатов обращается в истинное высказывание:

$$T_{P \vee Q} = T_P \cup T_Q.$$

***Импликацией*** предикатов *P(x)* и *Q(x)* называют предикат *P(x) => Q(x),* определенный на том же множестве и обращающийся в ложное высказывание при тех и только тех x, при которых *P(x)* обращаются в истинные высказывания, а *Q(x)* — в ложное.

Область истинности импликации предикатов определяют по формуле:

$$T_{P=>Q} = \overline{T_P} \cup T_Q.$$

***Эквиваленцией*** предикатов *P(x)* и *Q(x)* называют предикат *P(x)<=> Q(x),* определенный на том же множестве и обращающийся в истинное высказывание при тех и только тех *x*, при которых *P(x)* и *Q(x)* обращаются оба в истинные высказывания или оба в ложные.

Пользуясь данным определением, можно записать формулу для нахождения области истинности эквиваленцией предикатов:

$$T_{P<=>Q} = (T_P \cap T_Q) \cup (\overline{T_P} \cap \overline{T_Q}).$$

Для обращения предикатов в высказывания кроме замены переменных конкретным значением используют операцию ***навешивания кванторов.***

Выражение *«для всех x»* («для каждого *x*», «для любого *x*») называют ***квантором общности*** и обозначают символом **∀x.**

Выражение «существует такое *x*» («найдется такое *x*», «для некоторых *x*», «хотя бы для одного *x*») называют ***квантором существования*** и обозначают символом **∃*x*.**

Запись $(\forall x \in X)(P(x))$ читается: «Для любого значения *x* из множества *X* выполняется *P(x)»,* или «Для всех *x* из множества *X* имеет место *P(x)»,* или «Каждый элемент *x* из множества *X* обладает свойством *P».*

Запись, содержащая квантор существования $(\exists x \in X)(P(x)),$ читается так: «Существует такое значение *x* из множества *X,* что выполняется *P(x)*», или «Для некоторых x из множества *X* имеет место *P(x)*», или «Хотя бы один элемент из множества *X* обладает свойством *P».*

Если предикат *Q(x)* обращается в истинное высказывание при всех тех значениях, при которых предикат *P(x)* также обращается в *истинное высказывание,* то говорят, что предикаты *P(x)* и *Q(x)* находятся в отношении *логического следования*, а именно *P(x) => Q(x)* или из *P(x)* следует $Q(x$ Последнее высказывание истинно тогда и только тогда, когда множество истинности $T_P$ предиката $P(x)$ является подмножеством множества истинности $T_Q$ предиката $Q(x)$ ,т.е. $T_P \subset T_Q$.

Если имеют место логические следования $P(x) \Rightarrow Q(x)$ и $Q(x) \Rightarrow P(x)$, то говорят, что предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ *равносильны* и записывают $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$.

Предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ равносильны тогда и только тогда, когда $T_P = T_Q$.

Если имеет место логическое следование $P(x) \Rightarrow Q(x)$, то предикат $P(x)$ называют *достаточным условием* для $Q(x)$, а $Q(x)$ — *необходимым условием* для $P(x)$.

Если предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ равносильны, т. е. $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$, то $P(x)$ — *необходимое и достаточное* условие для $Q(x)$.

### 5.2 Строение и виды теорем.

Понятие логического следования позволяет уточнить ряд вопросов, связанных с предложениями, которые в математике называют теоремами.

***Теорема*** — это высказывание, истинность которого устанавливается посредством рассуждения (доказательства).

С логической точки зрения теорема представляет собой высказывание вида $A \Rightarrow B$, где $A$ и $B$ — высказывательные формы с одной или несколькими переменными. Предложение $A$ называют ***условием*** теоремы, а предложение $B$ — ее ***заключением***.

Например, условием теоремы «Если четырехугольник является прямоугольником, то в нем диагонали равны» является предложение «Четырехугольник — прямоугольник», а заключением — предложение «В четырехугольнике диагонали равны».

В рассмотренном примере теорема была сформулирована с помощью слов «если…, то…». Но, как нам известно, утверждение $A \Rightarrow B$ можно сформулировать и по-другому. Например, рассмотренную теорему можно сформулировать так: «Во всяком прямоугольнике диагонали равны» или «Для того чтобы четырехугольник был прямоугольником, необходимо, чтобы его диагонали были равны». Есть и другие способы, но удобнее теорему формулировать в виде «если…, то…», поскольку сразу видно ее условие (что дано) и заключение (что требуется доказать).

В математике кроме теорем используются предложения, называемые ***правилами*** и ***формулами***. Выясним, чем они отличаются от теоремы. Рассмотрим, например, такую теорему из школьного курса алгебры: «Если $a$ — любое число и $n$, $k$ — натуральные числа, то справедливо равенство $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$». Условие данной теоремы — это предложение «$a$ — любое число» и «$n$, $k$ — натуральные числа». Заключение — это равенство $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$, справедливость которого нужно доказать, исходя из данного условия.

Для того чтобы этой теоремой было удобнее пользоваться на практике, ее формулируют в виде правила: «При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются» или записывают только формулу $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$, опуская все условия, указанные в теореме. Такие упрощения позволяют быстрее запоминать правила и формулы. Эту особенность математического языка используют в начальном курсе математики, но при этом формулируют различные утверждения сразу в виде правил или формул, опуская точные формулировки теорем (и, следовательно, опуская, по сути дела, условие теоремы). Но учитель, конечно, должен уметь разворачивать изучаемые в начальной школе правила (формулы) и формулировать соответствующие им теоремы. Иначе возможны ошибки как содержательного, так и логического характера. Рассмотрим, например, изучаемое в начальном курсе математики правило деления суммы на число: «Для того чтобы разделить сумму на число, можно разделить на это число каждое из слагаемых и полученные результаты сложить». К этой словесной формулировке правила иногда добавляют формулу $(a + b) : c = a : c + b : c$.

Так как этот материал изучают в начальной школе, необходимо отчетливо понимать, что числа $a$, $b$ и $c$ могут быть только целыми неотрицательными, причем $c \neq 0$. Кроме того, воспользоваться правой частью этого равенства можно при условии, что $a$ кратно $c$ и $b$ кратно $c$.

Таким образом, теорема, лежащая в основе правила деления суммы на число, может быть сформулирована следующим образом:

«*Если $a$, $b$ и $c$ — целые неотрицательные числа ($c \neq 0$) и $a$ кратно $c$ и $b$ кратно $c$, то разделить сумму $a + b$ на число $c$ можно, разделив на это число каждое из слагаемых, и полученные результаты сложить*».

Для всякой теоремы вида «если $A$, то $B$» можно сформулировать предложение «если $B$, то $A$», которое называют *обратным* данному. Однако не всегда это предложение является теоремой. Рассмотрим, например, теорему: «Если четырехугольник является прямоугольником, то в нем диагонали равны». Построим предложение, обратное данному: «Если в четырехугольнике диагонали равны, то четырехугольник является прямоугольником». Это высказывание ложное, в чем можно убедиться, приведя контрпример: в равнобедренной трапеции диагонали равны, но трапеция не является прямоугольником.

Рассмотрим теперь теорему: «В равнобедренном треугольнике углы при основании равны». Обратное ей предложение таково:
«Если в треугольнике углы при основании равны, то этот треугольник — равнобедренный». Оно, как известно, истинное и поэтому является теоремой. Ее называют *теоремой, обратной данной*.

Для всякой теоремы вида *«если A, то B» можно сформулировать предложение «если не A, то не B», которое называют противоположным данному*. Но не всегда это предложение является теоремой. Например, предложение, противоположное теореме «Если четырехугольник является прямоугольником, то в нем диагонали равны», будет ложным: «Если четырехугольник не является прямоугольником, то в нем диагонали не равны».

В том случае, если предложение, противоположное данному, будет истинно, его называют *теоремой, противоположной данной*.

Таким образом, если для теоремы $A \Rightarrow B$ сформулировать обратное или противоположное предложения, то их надо доказывать (и тогда их можно называть соответственно обратной и противоположной теоремами) или опровергать.

Для всякой теоремы вида *«если A, то B»* можно сформулировать предложение *«если не B, то не A»,* которое называют обратным противоположному. Например, для теоремы *«Если четырехугольник является прямоугольником, то в нем диагонали равны»* предложение, обратное противоположному, будет таким: *«Если в четырехугольнике диагонали не равны, то он (четырехугольник) не является прямоугольником».* Это, как известно, предложение истинное и, следовательно, является теоремой, называемой *теоремой, обратно противоположной данной*.

Вообще, для каких бы теорем мы ни формулировали предложения, обратные противоположным, они всегда будут теоремами, потому что имеется следующая равносильность:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$$

Эту равносильность называют ***законом контрапозиции***. Принимаем его без доказательства. Согласно этому закону, *предложение, обратно противоположное какой-либо теореме, также является теоремой, и значит, вместо данной теоремы можно доказывать теорему, обратно противоположную данной.*

Кроме того, из закона контрапозиции следует, что предложение, обратное данному, и предложение, противоположное данному, либо одновременно истинны, либо одновременно ложны. Поэтому, рассматривая их, достаточно доказать (или опровергнуть) какое-нибудь одно, тем самым будет доказано (опровергнуто) и второе.

Заметим, что если для данной теоремы $A \Rightarrow B$ существует обратная $B \Rightarrow A$, то их можно объединить в одну $A \Leftrightarrow B$, и тогда в формулировке будут использоваться слова «необходимо и достаточно», «тогда и только тогда, когда». Например, объединение теоремы «В равнобедренном треугольнике углы при основании равны» и «Если в треугольнике углы при основании равны, то треугольник — равнобедренный» в одну, получим теорему: *«Треугольник будет равнобедренным тогда и только тогда, когда в нем углы при основании равны».*

Можно сформулировать ее иначе: *«Для того чтобы треугольник был равнобедренным, необходимо и достаточно, чтобы в нем углы при основании были равны».*

С другой стороны, если теорема имеет вид равносильности $A \Leftrightarrow B$, то это значит, что она состоит из двух взаимно-обратных теорем $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$, и следовательно, ее доказательство сводится к доказательству двух указанных теорем.

Заметим также, что если условие или заключение данной теоремы представляет собой конъюнкцию или дизъюнкцию, то, чтобы получить предложение, противоположное данному, нужно учитывать правила построения отрицания конъюнкции и дизъюнкции. Например, дана теорема *«Если число делится на 3 и 4, то оно делится на 12».* Предложение, противоположное данному, можно сформулировать так: *«Если число не делится на 3 или не делится на 4, то оно не делится на 12».*

Большинство теорем могут быть записаны в импликативной форме $(\forall x \in U)(P(x)) => Q(x)$, где $(\forall x \in U)$ — *разъяснительная часть* (преамбула), $P(x)$ — *условие* теоремы, $Q(x)$ — *заключение* теоремы.

С каждой теоремой указанного вида связаны еще три предложения:

$(\forall x \in U)(Q(x) => P(x))$ — *обратное данному,*

$(\forall x \in U)(\overline{P(x)} => \overline{Q(x)})$ — *противоположное данному,*

$(\forall x \in U)(\overline{Q(x)} => \overline{P(x)})$ — *обратное противоположному.*

Согласно закону контрапозиции, данное предложение и предложение, обратное противоположному, равносильны. Они истинны или ложны одновременно.

Аналогично, равносильными являются предложения обратное и противоположное данному.

Что же касается прямого и обратного предложений, то они не являются равносильными, т. е. прямое предложение может быть истинным, а обратное — ложным, и наоборот. Следовательно, доказав прямую теорему, мы ничего не можем сказать о справедливости обратной.

**Решение типовых примеров**

1.Выделим предикаты среди следующих предложений:

*а)* $13 < 19$; *б)* $25 < x$;

*в)* $2x + 5$; *г)* $5 + x < 9$;

*д)* $3 + 8 = 12$; *е)* $6 + 5 = 15$;

*ж)* $x^2 - 3x + 2 < 0$; *з)* $x||y$.

*Решение.*

Предложение *а)* является истинным высказыванием, (*д*) — ложным. Ни одно из них не является предикатом, поскольку не содержит переменную. Выражение *в)* содержит переменную х, но не является предикатом, поскольку не образует высказывательную форму (нет смысла говорить об истинности или ложности).

Предложения *б), г),* е), *ж), з)* являются предикатами, причем *б),* г), *ж)* — одноместные, а е), *з)* — двухместные предикаты.

2. На множестве $U = \{x|x \in N, x \leq 30\}$ заданы предикаты: *P(x)* — «*x* кратно 3»; *Q(x)* — «*x* кратно 5». Сформулируйте конъюнкцию и дизъюнкцию этих предикатов и найдем их множества истинности.

*Решение.*

*P(x)* ∧ *Q(x)* — «*x* кратно 3 и 5» конъюнкция

*P(x)* V *Q(x)* — «*x* кратно 3 или 5» дизъюнкция предикатов *P(x)* и *Q(x)*.

Для нахождения множеств истинности конъюнкции и дизъюнкции найдем множества истинности самих предикатов *P(x)* и *Q(x)*, а затем их пересечение и объединение:

$T_P = \{x|x \in N, x \leq 30, x \vdots 3\} = \{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\}$;

$T_Q = \{x|x \in N, x \leq 30, x \vdots 5\} = \{5,10,15,20,25,30\}$;

$T_{P\Lambda Q} = T_P \cap T_Q = \{15, 30\}$;

$T_{P\text{Л}Q} = T_P \cup T_Q = \{3,5,6,9,10,12,15,18,20,21,24,25,27,30\}$.

3.Выделите условие и заключение в каждой из следующих теорем:

а) Если углы смежные, то их сумма равна 180°;

б) Диагонали ромба взаимно перпендикулярны;

в) Равенство треугольников есть достаточное условие равенства их соответственных сторон;

*Решение.*

а) Углы смежные-*условие*; сумма углов равна 180°-*заключение*;

б)Четырехугольник является ромбом-условие; диагонали взаимно перпендикулярны-заключение;

в) Треугольники равны-условие; соответственные стороны треугольников равны- заключение;

4.Для теоремы: Если число делится на 3 и 4, то оно делится на 12 сформулируйте теорему, равносильную ей согласно закону контрапозиции.

*Решение.*

Если число не делится на 12, то оно не делится на 3 или на 4.

5.Для каждой из следующих теорем сформулируйте обратное, противоположное и обратно противоположное утверждения и установите, какие из них будут теоремами:

а) Если прямоугольник является квадратом, то его диагонали взаимно перпендикулярны и делят углы пополам;

б) Всякий параллелограмм с равными диагоналями есть прямоугольник или квадрат.

*Решение.*

а) *Обратное утверждение*: Если диагонали прямоугольника взаимно перпендикулярны и делят углы пополам, то прямоугольник - квадрат; Это утверждение является теоремой.

*Противоположное утверждение*: Если прямоугольник не является квадратом, то его диагонали взаимно не перпендикулярны и не делят углы пополам. Является теоремой.

*Обратно-противоположное*: Если диагонали прямоугольника взаимно не перпендикулярны и не делят углы пополам, то прямоугольник не является квадратом. Является теоремой

б) *Обратное утверждение:* Если параллелограмм является прямоугольником или квадратом, то его диагонали равны. Является теоремой

*Противоположное утверждение*: Если в параллелограмме диагонали не равны, то этот параллелограмм не прямоугольник и не квадрат. Является теоремой

*Обратно-противоположное*: Если параллелограмм не является прямоугольником или квадратом, то его диагонали не равны. Является теоремой

**Задания для самостоятельного решения.**

**Тест.** Выберите верный ответ.

1.Предикатом является запись:

1) 12+1=13
2) $6c>2c^3+1$
3) 16 ⋮4
4) $(\forall x \in N)x \;\vdots\; 3$
5) В этом списке нет предикатов

2.На множестве $E=\{x|x\in Z,\ x \le 3\}$ задан предикат B(x): « x > 2 ».

Множеством истинности предиката B(x) является множество:

1) $\{x|x\in Z,\ x>2\}$;

2) {2; 3};
3) {3};
4) Ø;
5) в данном списке нет множества истинности предиката B(x).

3.На множестве $E=\{x|x\in N_0,\ 4< x\ \}$задан предикат D(x): « $x \le 4$ ». Множеством истинности отрицания предиката D(x) является множество:

1) {5};
2) {1;2;3;4};
3) {0;1;2;3;4};
4) Ø;
5) в данном списке нет множества истинности отрицания предиката D(x).

4.На множестве $E=\{x|x\in N,\ x \le 6\}$ задан предикаты B(x): « $x > 2$ » и C(x): « $x <5$ ». Множеством истинности предиката $B(x) \vee C(x)$ является множество:

1) $\{x|x\in N,\ x \le 6\}$;
2) {2;3;4;5};
3) {3; 4};
4) Ø;
5) в данном списке нет множества истинности предиката $B(x) \vee C(x)$.

5.Отрицанием высказывания «некоторые глаголы отвечают на вопрос «что делать?» является предложение:

1) некоторые глаголы не отвечают на вопрос «что делать?»
2) существуют глаголы, которые не отвечают на вопрос «что делать?»
3) любые глаголы отвечают на вопрос «что делать?»
4) любые глаголы не отвечают на вопрос «что делать?»
5) в данном списке нет необходимого предложения

Решите примеры.

1.Выделите условие и заключение в каждой из следующих теорем:

а) Если углы смежные, то их сумма равна 180°;

б) Диагонали ромба взаимно перпендикулярны;

в) Равенство треугольников есть достаточное условие равенства их соответственных сторон;

г) Четность суммы есть необходимое условие четности каждого слагаемого.

2.Сформулируйте предложения, обратные следующим теоремам и установите, какие из них являются теоремами:

а) Если четырехугольник является ромбом, то его диагонали взаимно перпендикулярны;

б) Если каждое слагаемое является четным числом, то и сумма — четное число.

3.Сформулируйте предложения, противоположные теоремам, приведенным в задании 1. Какие из этих предложений — теоремы?

4.Приведенные правила взяты из учебников для начальных классов. Установите, какие теоремы сформулированы в виде этих правил:

а) Если к разности прибавить вычитаемое, то получится уменьшаемое;

б) Если произведение двух чисел разделить на один из мно-жителей, то получим другой множитель;

в) При делении любого числа на единицу в частном получится то число, которое делили.

**Вопросы теории.**

1. Какое предложение называется высказывательной формой (предикатом)?
2. Какие виды предикатов вы знаете?
3. Какие предикаты называются равносильными?
4. Что называют множеством истинности предиката?
5. Какие логические операции можно выполняться над предикатами?
6. Кванторы общности и существования.
7. Какое предложение называют теоремой, доказательством?
8. Из каких частей состоит теорема?
9. Какая теорема называется обратной данной, противоположной данной, обратно противоположной?

**Литература:**

1.Аматова Г.М., Аматов М.А.: Математика. – М.: Академия 2008.

2.Аматова Г.М., Аматов М.А.: Математика. Упражнения и задачи. – М.: Академия 2008.С.33-58

3.Стойлова Л.П. Математика. – М.: Академия. 2013. - 463 с

## Тема 6. Выражения числовые и с переменной, равенства и неравенства. Уравнения и неравенства с переменной. Числовая функция.

1.Выражения числовые и с переменной, равенства и неравенства. Уравнения и неравенства с переменной.

2.Числовая функция. График функции**.**

### 6.1 Выражения числовые и с переменной, числовые равенства и неравенства. Уравнения и неравенства с переменной.

В математике записи 2 + 8, 24 : 3, 6 · 2 - 4, (23 + 5) · 2 - 17 называют *числовыми выражениями*. Они образуются из чисел, знаков действий и скобок.

Если выполнить все действия, указанные в выражении, то получим число, которое называют *значением числового выражения*. Так, значение числового выражения 6 · 2 - 4 равно 8.

Существуют числовые выражения, значения которых нельзя найти. Про такие выражения говорят, что они *не имеют смысла*. Например, выражение 6 : (2 - 2) смысла не имеет, поскольку его значение найти нельзя: 2 - 2 = 0, а деление на нуль невозможно. Не имеет смысла и выражение 5 - 7, если рассматривать его на множестве натуральных чисел, так как на этом множестве значение выражения 5 - 7 найти нельзя.

Определить понятие числового выражения можно следующим образом. Если $f$ и $g$ — числовые выражения, то $(f) + (g)$, $(f) - (g)$, $(f) \cdot (g)$, $(f) : (g)$ — ***числовые выражения***. Считают, что каждое число является числовым выражением.

Если точно следовать этому определению, то пришлось бы писать слишком много скобок, например, (6) + (4) или (9):(3). Для сокращения записи условились опускать скобки, если несколько выражений складываются или вычитаются, причем эти операции выполняются слева направо.

Точно так же не пишут скобки и при умножении или делении несколько чисел, причем эти операции выполняются по порядку слева направо. Например, пишут так: 37 - 12 + 62 - 17 + 13 или
120 : 15 · 7 : 12.

Кроме того условились сначала выполнять действия второй ступени (умножение и деление), а затем действия первой ступени (сложение и вычитание).

Поэтому выражение $(12 \cdot 4 : 3) + (5 \cdot 8 : 2 \cdot 7)$ записывают так:
$12 \cdot 4 : 3 + 5 \cdot 8 : 2 \cdot 7$.

В частности, если в числовом выражении содержится буква, то оно называется *буквенным.* Рассмотрим запись $3a + 6$. Она образована из чисел, знаков действий и буквы $a$. Если вместо $a$ подставлять числа, то будут получаться различные числовые выражения:

- если $a = 7$, то $3 \cdot 7 + 6$;
- если $a = 0$, то $3 \cdot 0 + 6$;
- если $a = - 4$, то $3 \cdot (- 4) + 6$.

В записи $3a + 6$ такую букву $a$ называют *переменной*, а саму запись $3a + 6$ — ***выражением с переменной***.

В выражения с переменной могут входить буквы, числа, знаки операций и скобки. Так, 3x+2, x+(y-4), (x+1): 2 – выражения с переменными.

Переменную в математике, как правило, обозначают любой строчной буквой латинского алфавита.

В начальной школе для обозначения переменной кроме букв используются другие знаки, например □. Тогда запись выражения с переменной имеет вид: 3 · □ + 6.

Каждому выражению с переменной соответствует множество чисел, при подстановке которых получается числовое выражение, имеющее смысл. Это множество называют *областью определения выражения*. Например, область определения выражения $7 : (x - 5)$ состоит из всех действительных чисел, кроме числа 5, так как при $x = 5$ выражение $7 : (5 – 5)$ смысла не имеет.

Множество значений переменной буквы, при которых выражение с переменной имеет смысл, называют ***областью определения*** выражения с переменной.

Если дано выражение с двумя переменными x и y, то областью его определения является множество пар чисел (x, y), при которых это выражение имеет смысл.

В математике рассматривают выражения, содержащие одну, две и больше переменных. Например, $6a + 8$ — выражение с одной переменной, а 2х-4у-выражение с двумя переменными, а $(3x + 5y) \cdot z$ — выражение с тремя переменными.

Чтобы из выражения с тремя переменными получить числовое выражение, надо вместо каждой переменной подставить числа, принадлежащие области определения выражения.

Но используя алфавит математического языка, можно образовать и такие, например, записи: (7+ 2)) - · 14 или $5x$ - $2y$ : +) 6, которые нельзя назвать ни числовым выражением, ни выражением с переменной.

Эти примеры свидетельствуют о том, что описание — из каких знаков алфавита математического языка образуются выражения числовые и с переменными, не является определением этих понятий.

***Задача.*** Найти значение выражения $3x(x - 2) + 4(x - 2)$ при $x = 6$.

*Решение*.

*I способ.* Подставим число 6 вместо переменной в данное выражение: $3 \cdot 6 \cdot (6 - 2) + 4 \cdot (6 - 2)$. Чтобы найти значение по- лученного числового выражения, выполним все указанные действия: $3 \cdot 6 \cdot (6 - 2) + 4 \cdot (6 - 2) = 18 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 72 +16 = 88$.

Следовательно, при $x = 6$ значение выражения $3x(x - 2) + 4(x - 2)$ равно 88.

*II способ.* Прежде чем подставлять число 6 в данное выражение, упростим его: $3x(x - 2) + 4(x - 2) = (x - 2)(3x + 4)$. И затем, подставив в полученное выражение вместо $x$ число 6, выполним действия: $(6 - 2) \cdot (3 \cdot 6 + 4) = 4 \cdot (18 + 4) = 4 \cdot 22 = 88$.

Обратим внимание на следующий факт: как при первом способе решения задачи, так и при втором, одно выражение заменялось другим. Например, выражение $18 \cdot 4 + 4 \cdot 4$ заменялось выражением 72 + + 16, а выражение $3x(x - 2) + 4(x - 2)$ — выражением $(x -2)(3x +4)$, причем эти замены привели к одному и тому же результату. В математике, описывая решение данной задачи, говорят, что выполнялись тождественные преобразования выражений.

Два выражения называют ***тождественно равными***, если при любых значениях переменных из области определения выражений их соответственные значения равны. Примером тождественно равных выражений могут служить выражения $5(x+2)$ и $5x+10$, поскольку при любых действительных значениях $x$ их значения равны.

Если два тождественно равных на некотором множестве выражения соединить знаком равенства, то получим предложение, которое называют ***тождеством*** на этом множестве.

Например. $5(x+2)=5x+10$ — тождество на множестве действительных чисел, потому что для всех действительных чисел значения выражений $5(x+2)$ и $5x+10$ совпадают. Используя обозначение квантора общности, это тождество можно записать таким образом: $(\forall x \ x \in \mathbf{R})$ $[5(x+2)=5x+10]$. Тождествами считают и верные числовые равенства.

Замену выражения другим, тождественно равным ему на некотором множестве, называют ***тождественным преобразованием данного выражения на этом множестве***.

Так, заменив выражение $5(x+2)$ на тождественно равное ему выражение $5x+10$, мы выполнили тождественное преобразование первого выражения. Но как, имея два выражения, узнать, являются ли они тождественно равными? Находить соответствующие значения выражений, подставляя конкретные числа вместо переменных, долго и не всегда возможно.

В начальном курсе математики выполняют, как правило, только тождественные преобразования числовых выражений. Теоретической основой таких преобразований являются свойства сложения и умножения, различные правила: прибавления суммы к числу, числа к сумме, вычитания числа из суммы и др. Например, чтобы найти произведение $35 \cdot 4$, можно выполнить преобразования: $35 \cdot 4=(30+5) \cdot 4=30 \cdot 4+5 \cdot 4=120+20=140$. В основе выполненных преобразований лежат свойство дистрибутивности умножения относительно сложения; принцип записи чисел в десятичной системе счисления $(35=30+5)$; правила умножения и сложения натуральных чисел.

### *Числовые равенства и неравенства*

Если два числовых выражения соединить знаком равенства, то получим высказывание, называемое ***числовым равенством***. Числовое равенство является истинным, если значения числовых выражений, стоящих в левой и правой части, равны.

Если два числовых выражения соединить знаком > или <, то получится высказывание, которое называют ***числовым неравенством***.

Если a,b,c натуральные числа, то неравенство a>b>c представляет собой конъюнкцию числовых неравенств a>b и b >c.

Неравенство $a \geq b$ ($a \leq b$) представляет собой дизъюнкцию числового неравенства a>b (b <c) и числового равенства a=b.

В общем виде. Пусть $f$ и $g$ — два числовых выражения. Соединим их знаком равенства. Получим предложение $f = g$, которое называют ***числовым равенством***.

Возьмем, например, числовые выражения 3 + 2 и 6 - 1 и соединим их знаком равенства 3 + 2 = 6 - 1. Оно истинное. Если же соединить знаком равенства числовые выражения 3 + 2 и 7 - 3, то получим ложное числовое равенство 3 + 2 = 7 - 3. Таким образом, *с логической точки зрения* ***числовое равенство*** *— это высказывание, истинное или ложное.*

*Числовое равенство истинно, если значения числовых выражений, стоящих в левой и правой частях равенства, совпадают.*

Напомним некоторые *свойства истинных числовых равенств*:

1)если к обеим частям истинного числового равенства прибавить одно и то же числовое выражение, имеющее смысл, то получим также истинное числовое равенство;

2)если обе части истинного числового равенства умножить на одно и то же числовое выражение, имеющее смысл, то получим также истинное числовое равенство.

Например, если соединить выражения 6 + 2 и 13 - 7 знаком «>», то получим истинное числовое неравенство 6 +2>13 - 7. Если соединить те же выражения знаком «<», то получим ложное число вое неравенство 6 + 2 <13 - 7. Таким образом, *с логической точки зрения* ***числовое неравенство*** *— это высказывание, истинное или ложное.*

Рассмотрим некоторые *свойства истинных числовых неравенств*:

1)если к обеим частям истинного числового неравенства прибавить одно и то же числовое выражение, имеющее смысл, то получим также истинное числовое неравенство;

2)если обе части истинного числового неравенства умножить на одно и то же числовое выражение, имеющее смысл и положительное значение, то получим также истинное числовое неравенство;

3)если обе части истинного числового неравенства умножить на одно и то же числовое выражение, имеющее смысл и отрицательное значение, а также поменять знак неравенства на противоположный, то получим также истинное числовое неравенство.

***Неравенства с переменной***

Предложения вида $2x + 7 > 10 - x$, $x^2 + 7x < 2$, $(x + 2)(2x - 3) > 0$ называют неравенствами с одной переменной.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — два выражения с переменной $x$ и областью определения $X$. Тогда неравенство вида $f(x) > g(x)$ или $f(x) < g(x)$ называют ***неравенством с одной переменной***. Множество $X$ называют ***областью его определения***.

Значение переменной $x$ из множества $X$, при котором неравенство обращается в истинное числовое неравенство, называют его *решением*. *Решить неравенство — значит, найти множество его решений.*

Решением неравенства $2x + 7 > 10 - x$, $x \in \mathbf{R}$, является число $x = 5$, так как $2 \cdot 5 + 7 > 10 - 5$ — истинное числовое неравенство. А множество его решений — это промежуток $(1, \infty)$, который находят, выполняя следующее преобразование неравенства: $2x + 7 > 10 - x \Rightarrow 3x > 3 \Rightarrow x > 1$.

В основе решения неравенств с одной переменной лежит понятие равносильности.

Два неравенства называют ***равносильными***, если их множества решений равны.

Например, неравенства $2x + 7 > 10$ и $2x > 3$ равносильны, так как их множества решений равны и представляют промежуток:$(1{,}5; \infty)$.

Утверждения о равносильности неравенств и следствия из них аналогичны утверждениям о равносильности уравнений.

1.Пусть неравенство $f(x) > g(x)$ задано на множестве $X$ и $h(x)$ — выражение, определенное на том же множестве. Тогда неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x) + h(x) > g(x) + h(x)$ равносильны на множестве $X$.

Из этого утверждения вытекают *следствия*, которые часто используются при решении неравенств:

1) если к обеим частям неравенства $f(x) > g(x)$ прибавить одно и то же число $d$, то получим неравенство $f(x) + d > g(x) + d$, равно сильное исходному;

2) если какое-либо слагаемое (числовое выражение или выражение с переменной) перенести из одной части неравенства в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный, то получим нера- венство, равносильное данному.

2.Пусть неравенство $f(x) > g(x)$ задано на множестве $X$ и $h(x)$ — выражение, определенное на том же множестве, и для всех $x$ из множества $X$ выражение $h(x)$ принимает положительные значения. Тогда неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x) \cdot h(x) > g(x) \cdot h(x)$ равносильны на множестве $X$.

Из этого утверждения вытекает *следствие*: если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить (разделить) на одно и то же положительное число $d$ ($d \neq 0$), то получим неравенство равносильное данному.

3.Пусть неравенство $f(x) > g(x)$ задано на множестве $X$ и $h(x)$ —

выражение, определенное на том же множестве, и для всех $x$ из мно-

жества $X$ выражение $h(x)$ принимает отрицательные значения. Тогда

неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x) \cdot h(x) < g(x) \cdot h(x)$ равносильны на

множестве $X$.

Из этого утверждения вытекает *следствие*: если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить (разделить) на одно и то же отрицательное число $d$ ($d \neq 0$) и знак неравенства поменять на противоположный, то получим неравенство

**Уравнения с одной переменной.**

*Уравнением с одной переменной* называется предикат вида $f(\mathrm{x}) = g(x)$, где $f(\mathrm{x})$ и $g(x)$- выражения с переменной.

*Решением* или *корнем* уравнения с одной переменной называется всякое значение переменной, которое обращает данное уравнение в истинное числовое равенство. *Решить уравнение* – значит найти множество его решений.

Множество значений переменной, при которых выражения $f(\mathrm{x})$ и $g(x)$ имеют смысл, называется *область определения* уравнения $f(\mathrm{x}) = g(x)$. Множество решений уравнения является подмножеством области его определения.

Уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ называются *равносильными* на множестве X, если их множества решений совпадают.

**Уравнения с двумя переменными**

Рассмотрим уравнение с двумя переменными $f(x;\ y) = 0$. Пара значений переменных, обращающая уравнение с двумя переменными в верное равенство, называется *решением уравнения*. Для отыскания решений удобно выражать одну переменную через другую.

Уравнения с двумя переменными называются *равносильными*, если они имеют одни и те же корни. Для уравнений с двумя переменными справедливы теоремы о равносильных преобразованиях, приведенные для уравнений с одной переменной.

***Система двух уравнений с двумя переменными***:

Пусть даны два уравнения с двумя неизвестными $f(x,y) = 0$ и $g(x,y) = 0$, где $f(x,y)$, $g(x,y)$ – некоторые выражения с переменными *X* и *У*. Если ставится задача найти все общие решения данных уравнений, то говорят, что задана ***система уравнений***:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0, \\ g(x,y) = 0. \end{cases}$$

Решить систему– значит найти все пары чисел $(x,y)$, которые являются решением каждого уравнения, или доказать, что таких пар чисел не существует.

Аналогично определяется понятие системы с тремя и более неизвестными. Системы, все уравнения которых однородные, называются ***однородными*** системами уравнений.

Система называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение и ***несовместной***, если таких решений не существует.
Две системы уравнений ***эквивалентны*** (*Равносильны*), если они имеют одни и те же решения или обе не имеют решений.
Две системы уравнений называются равносильными, если эти системы имеют одни и те же решения.

## 6.2 Числовая функция. График функции

**Определение.** Говорят, что на множестве $D \subset R$ задана числовая *функция* $f$, если каждому числу $x \in D$ по определенному правилу сопоставлено единственное число y. При этом $D$ называется *областью определения*, $x$ – *аргументом* или *неизвестной переменной*, $y$ – *значением функции* в точке $x$ или *зависимой переменной*.

Функция записывается так: $y = f(x)$.

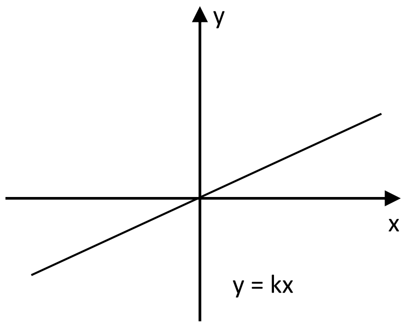
Ясно, что функция может быть определена и как соответствие между множествами $D$ и $R$, при котором каждому $x \in D$ соответствует один $y \in R$. График этого соответствия называют графиком функции $f$.
На практике функции часто задают либо *формулой,* либо *таблицей*, либо с *помощью графика*.

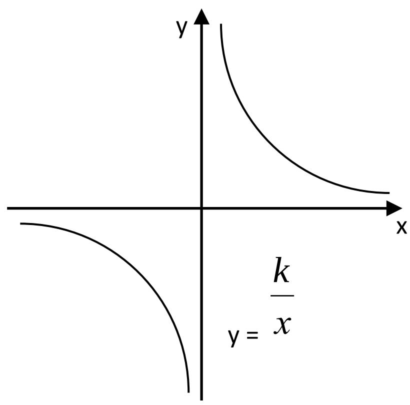
Самыми простыми и важными примерами функций являются прямая и обратная пропорциональности.

Функция, заданная формулой $y = k \times x$, где $k \in R$ – отличное от нуля число, называется ***прямой пропорциональностью***. При этом $k$ называется *коэффициентом пропорциональности*. Графиком прямой пропорциональности является прямая, проходящая через начало координат, а область определения $]-\infty;+\infty[$.(Рис.39, *а*)

Функция, заданная формулой $y = \dfrac{k}{x}$, где $k \in R$– отличное от нуля число, называется ***обратной пропорциональностью***, $k$ также называется *коэффициентом пропорциональности*.

Графиком обратной пропорциональности является гипербола, состоящая из двух ветвей. (Рис.39, *б*)




Область определения $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

*а* *б*

Рис.39

С пропорциональными величинами связано довольно много задач начального курса математики. В первую очередь отмечают связь между:1) количеством, ценой и стоимостью товара: $y= k\times x$,где $x$ количество,$k$–цена, $y$–стоимость;2)временем, скоростью и пройденным путем при равно мерном прямолинейном движении: $s=v\times t$, где $t$ – время, $v$ – скорость, $s$ – путь.

*Линейной функцией* называется такая функция, которая задана формулой $y=kx+b$, где $k$ и $b$ – действительные числа. Если, в частности, $k=0$, то получаем постоянную функцию $y=b$; если $b=0$, то получаем прямую пропорциональность $y=kx$.

Графиком линейной функции $y=kx+b$ является прямая(Рис.40).

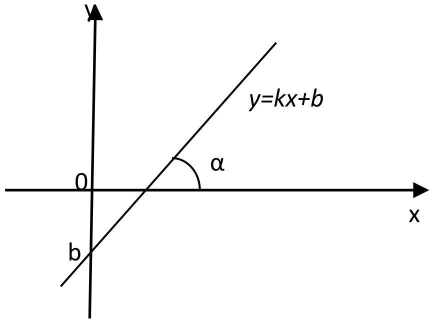



Рис.40.

Перечислим свойства линейной функции $y=kx+b$ при $k\neq 0$, $b\neq 0$.

1) область определения функции – множество всех действительных чисел;

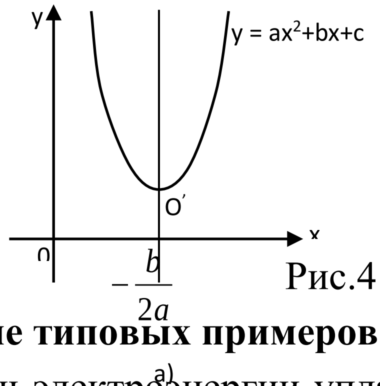
2) функция $y=kx+b$ ни четна, ни нечетна.

3) при $k>0$ функция возрастает, а при $k<0$ – убывает на всей числовой прямой.

*Квадратичной* называют функцию, которую можно задать формулой вида $y=ax^2+bx+c$ , где a, $b$, $c$ – любые действительные числа, причем $a\neq 0$.

Графиком функции $y=ax^2+bx+c$ , где $a\neq 0$ является *парабола*.

Если $a>0$ то ветви параболы направлены вверх (Рис.41, а); в этом случае функция убывает на промежутке $\left(-\infty;\frac{-b}{2a}\right]$ и возрастает на промежутке $\left[\frac{-b}{2a};+\infty\right)$ Если $a<0$, то ветви параболы направлены вниз (Рис.41, б); в этом случае функция возрастает на промежутке $\left(-\infty;\frac{-b}{2a}\right]$ и убывает на промежутке $\left(\frac{-b}{2a};+\infty\right)$.



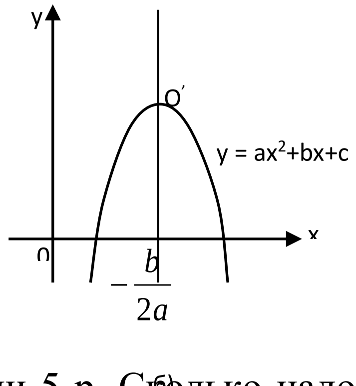




Рис.41.

**Решение типовых примеров.**

1.За 125 квт/ч электроэнергии уплатили 5 р. Сколько надо уплатить за 75 квт/ч электроэнергии?

*Решение.*

Выясним, сколько нужно уплатить за 1 квт/ч: 500:125=4 (коп.).Зная стоимость 1 квт/ч, найдем ответ на вопрос задачи: $75\times 4=300$ (коп.)= 3 (руб.).Ответ.3 рубля.

2.Из одного пункта в одном направлении выехали два велосипедиста, один со скоростью 15 км/ч, а другой – со скоростью 12 км/ч. Какое расстояние между ними будет через 5 ч

*Решение*. Сначала найдем скорость удаления: 15–12= 3 (км/ч), а затем расстояние между ними через 5 ч: $3\times 5=15$ (км).

3.Решить неравенство $5x-5<2x+16$, $x\in\mathbf{R}$, и обосновать все преобразования, которые выполняются в процессе решения.

*Решение*. В неравенстве $5x - 5 < 2x + 16$ перенесем неизвестные в левую часть, а известные в правую часть неравенства, меняя при этом знаки на противоположные и сохранив знак неравенства. Получим:$5x-2x < 16+5$.Отсюда получим: $x < 7$.Решением неравенства является промежуток $(< , 7)$ и, следовательно, множеством решений неравенства $5x - 5 < 2x + 16$ является промежуток $(-\infty, 7)$.

4.Равносильны ли на множестве действительных чисел следующие пары неравенств:

а) $-17x < -51$ и $x > 3$;

б) $6 - 5x > -4$ и $x < 2$?

*Решение.*

а) $-17x < -51 \Rightarrow (-17):(-17)\ x > (-51):(-17) \Rightarrow x > 3$,*в заданном неравенстве*) $-17x < -51$ обе части разделили на -17,при этом поменяли знаки обеих частей и знак неравенства на противоположный, т.к. делили на отрицательное число. *Следовательно*$-17x < -51$ и $x > 3$ равносильны.

б) $6 - 5x > -4 \Rightarrow -5x > -4 - 6 \Rightarrow -5x > -10 \Rightarrow (-5):(-5)\ x < (-10):(-5) \Rightarrow x < 2$.Следовательно неравенства $6 - 5x > -4$ и $x < 2$ равносильны.

5.Решите неравенство $3(x - 2) - 4(x + 1) < 2(x - 3) - 2$ и обоснуйте все преобразования, которые будете при этом выполнять.

*Решение.*

$3(x - 2) - 4(x + 1) < 2(x - 3) - 2 \Rightarrow 3x - 6 - 4x - 4 < 2x - 6 - 2 \Rightarrow -3x < 2 \Rightarrow x > -2/3$

Множеством решений неравенства$3(x - 2) - 4(x + 1) < 2(x - 3) - 2$ является промежуток $(-2/3, +\infty)$.

6.Построить графики функции:

а) $y = 2x - 3$, заданной на множестве **R**,

*б)*$y = x^2$, заданной также на множестве **R**.

*Решение.*

а)Для построения графика функции $y = 2x - 3$, зададим значения x=0 и x=1.При x=0 получим y=-3,при x=1 получим y=-1.Построим точки (0,-3) и (1,-1) на плоскости коордит и проведем прямую через эти точки. Графиком функции $y = 2x - 3$ на множестве **R** является прямая (Рис. 42,а), б)графиком функции $y = x^2$, заданной также на множестве **R**, — парабола (Рис.42,б).Для построения графика нужно найти координаты нескольких точек.

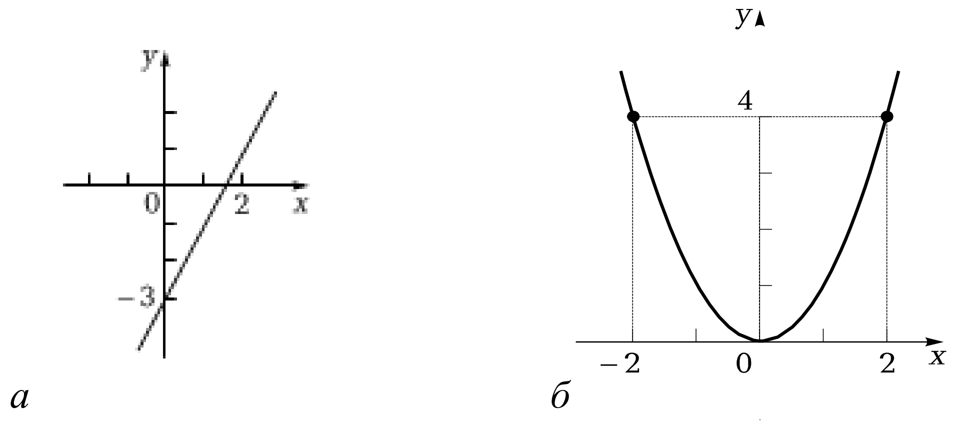



Рис.42

**Задания для самостоятельного решения.**

1.Из данных записей выберите числовые равенства.

$5 \cdot 6^3 + 12$; $2^3 + 12 = 20$; $5 \cdot 6^3 > 12$; $17 - 5 \cdot a^3$; $17 - 5 \cdot a^3 = 7$; $5=7$; $5 \cdot 6^3 + 12 = 3$;

2.Решите уравнение 18:(10-$x$)=3 на основании зависимости между результатом и компонентами арифметических действий. Обоснуйте преобразования.

3.Выясните, являются ли равносильными уравнения $2x + 1 = 9$ и $(2x+1)(x-4) = 9(x-4)$ на множестве действительных чисел. Ответ пояснить

4. Решить неравенства.

а) $x - 1 < 4$

б)$x + 2 < 6$

в) $x - 5 < 4$,

5. Является ли число 3 решением неравенства $6(2x + 7) < 15(x + 2)$, $x \in \mathbf{R}$? Число 4,25?

6.Какие из следующих высказываний истинны:

а) $-7x < -28 \Rightarrow x > 4$;

б) $x < 6 \Rightarrow x < 5$;

в) $x < 6 \Rightarrow x < 20$?

7.Каждому числу из множества X= {3,4,5} поставлен в соответствие его делитель из множества натуральных чисел. Является ли это отношение функцией?

8.Функция задана уравнением y=2x-4. Область ее определения множество {0,1,2,3,4,5}. Найдите множество значений этой функции.

9.Постройте графики следующих функций.

1) а)y=2x;б)y=2x-1;

б)y=2x+3; в)y = - 2x;

в) y =- x + 9.

2) а)y=0,5x;

б)y=0,5x - 2;

3). а) $y=0,5x^2+3x+0,5$;

б) $y=-2x^2+12x-19$;

в) $y=\frac{1}{2}x^2$ ;г)$y=2x^3$; .

**Вопросы теории:**

1.Дайте определение числовому выражению, значению числового выражения Какие два выражения называют равными?

2.Дайте определение выражению с переменной. Что называется областью определения выражения? Что называется тождественным преобразованием выражения с переменной?

3.Дайте определение неравенству с одной переменой и назовите их свойства. Что значит решить неравенство с одной переменной? Когда два неравенства равносильны?

4.Что называют уравнением с одной переменной? Что значит решить уравнение? Когда два уравнения называют равносильными?

5.Дайте определение уравнению с двумя переменными. Что значит решить уравнение с двумя переменными.

6.Что называют числовой функцией, областью определения функции?

Перечислите способы задания функции.

7.Дайте определения следующим видам функций: прямая пропорциональность, обратная пропорциональность, линейная функция.

8.Что является графиком прямо-пропорциональной функции, обратно-пропорциональной функции, линейной функции?

**Литература.**

1.Аматова Г.М., Аматов М.А.: Математика. – М.: Академия 2008.

2.Аматова Г.М., Аматов М.А.: Математика. Упражнения и задачи. – М.: Академия 2008.С.38-53

3.Стойлова Л.П. Математика. – М.: Академия. 2013. - 463 с

## Литература.


1. Аматова Г.М., Аматов М.А.: Математика. – М.: Академия 2008.
2.Аматова Г.М., Аматов М.А.: Математика. Упражнения и задачи. – М.: Академия 2008.
3.Гашаров Н.Г.,Махмудов Х.М.: Математика. Учебное пособие для студентов 1 курса ФНК.-Махачкала,2012,Изд-воГоспедуниверситет,130 с.
4.Стойлова Л. П. Математика: [учебник по направлению 050100 "Педагогическое образование", профиль подготовки "Начальное образование"/Л. П. Стойлова - Москва: Академия, 2013. - 463 с

## СОДЕРЖАНИЕ

**З.А. Магомеддибирова**

# ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

*Учебное пособие для бакалавров по профилю подготовки «Начальное образование» направления «Педагогическое образование»*

Гарнитура «Таймс» Печать ризографная
Усл. п. л. 6,25. Тираж 100 экз. Заказ 21.
Отпечатано в Издат. Центре
г. Махачкала, ул. М.Ярагского 55а